Verträglichkeit und Ersetzbarkeit von konvergenztreuen Matrixverfahren

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

dem Fachbereich Mathematik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Johann Boos
aus Aitrach, Krs. Wangen

1971

1972

Verträglichkeit und Ersetzbarkeit von konvergenztreuen Matrixverfahren

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

dem Fachbereich Mathematik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Johann Boos
aus Aitrach, Krs. Wangen

1972

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Prüfung: 17. Dezember 1971

Dekan Prof. Dr. E. Meister

1. Berichterstatter: Dr. W. Beekmann

2. Berichterstatter: Prof. Dr. K. Zeller

3. Berichterstatter: Prof. Dr. H. H. Schaefer

Inhaltsverzeichnis

§0 Einleitung 1

§1 Bezeichnungen, Definitionen und Bemerkungen 7

§2 Das Wirkfeld c_A als FK-Raum und der Dualraum c_A' bzgl. dieser Topologie 13

§3 Ausgezeichnete Teilmengen des Wirkfelds c_A eines Matrixverfahrens A 22

§4 Sätze vom Mazur-Orlicz-Typ 27

§5 Die Verträglichkeitseigenschaften O, $|O|$, O_F und die Perfektheitseigenschaften J, $|J|$ und J_F 45

§6 Invarianz der Eigenschaften O, O_F, J und J_F und Ersetzbarkeit konullärer Matrixverfahren 55

§7 Abgeschlossenheit von L_A bzgl. der FK-Topologie von c_A 64

§8 Beispiele 67

Literaturverzeichnis 81

§0 Einleitung

In der folgenden Arbeit werden wir nur FF-Matrixverfahren betrachten, d.h. Verfahren, die Folgen in Folgen transformieren und von folgender Art sind: Durch eine unendliche Matrix $A = (a_{nk})_{n,k\in\mathbb{N}}$ mit komplexen Elementen transformiert man eine gegebene Folge $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in eine Folge

$t := \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k \right)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei man die Existenz der Reihen für alle $n\in\mathbb{N}$ verlangt. Die Menge der Folgen x, für die Letzteres erfüllt ist, heißt Anwendungsbereich d_A der Matrix A. Als Wirkfeld c_A oder als die Menge der durch A limitierbaren Folgen bezeichnet man die Menge der Folgen $x \in d_A$, für die

$\lim_A x := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k$ existiert. Falls nichts anderes vorausgesetzt wird, werden wir im folgenden nur konvergenztreue Verfahren betrachten, d.h. Verfahren, die alle konvergenten Folgen in konvergente Folgen transformieren.

Das Wirkfeld c_A einer Matrix A kann mit einer geeigneten lokalkonvexen Topologie, mit der sogenannten FK-Topologie, versehen werden(vgl.K.Zeller [26,S.38ff]); c_A zusammen mit dieser Topologie wird als FK-Raum bezeichnet. Nach einigen grundlegenden Definitionen,

Bemerkungen und Einführung von Bezeichnungen in §1, wird in §2 c_A als FK-Raum eingeführt. Über die Halbnormen, welche die FK-Topologie erzeugen, gewinnt man eine Darstellung der stetigen linearen Funktionale auf c_A (vgl. K. Zeller [26, §5]).

A. Wilansky betrachtete in [24] u.a. ausgezeichnete Teilmengen des FK-Raumes c_A, welche teilweise bereits von K. Zeller in [28] betrachtet wurden. Analog zu [2, §3] werden wir in §3 das absolut-A-beschränkte Wirkfeld $|A| \cap c_A$ einer Matrix A in diese ausgezeichneten Teilmengen einordnen, wobei unter dem absolut-A-beschränkten Wirkfeld die Menge der Folgen $x \in c_A$ mit $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} x_k| < \infty$ zu verstehen ist.

U.a. erhält man $\sum_{k=1}^{\infty} |\lim_{n \to \infty} a_{nk} x_k| < \infty$ für alle $x \in |A| \cap c_A$ (vgl. [2, 3.3]) und eine spezielle Darstellung der stetigen linearen Funktionale auf c_A, welche auf A. Wilansky in [24, Lemma 5.3] zurückgeht.

Ausgangspunkt in §4 ist der Satz von Mazur-Orlicz ([13, Theorem 2]) bzw. der Satz von Volkov ([19, Satz 1]), in welchen für koreguläre Verfahren A und B aus $c_B \supseteq m \cap c_A$ bzw. $|B| \cap c_B \supseteq |A| \cap c_A$ die Verträglichkeit auf $m \cap c_A$ bzw. $|A| \cap c_A$ gefolgert wird. Definiert man die Menge F_A als die Menge der Folgen

$x \in c_A$, für die $\sum_{k=1}^{\infty} x_k f(e^k)$ für alle $f \in c_A'$ existiert, so kann gezeigt werden, daß der entsprechende Satz auch für F_A gilt, d.h. sind A und B auf den konvergenten Folgen verträgliche koreguläre Matrixverfahren mit $F_A \subseteq c_B$, so sind A und B auf F_A verträglich. Die Beweise für die Sätze von Mazur-Orlicz und den eben zitierten Satz werden parallel mit einigen Fallunterscheidungen durchgezogen.

Im zweiten Teil von §4 werden wir untersuchen, unter welchen Voraussetzungen die drei zitierten Sätze für konulläre Verfahren gelten. S.C. Chang bewies in [4, Theorem 3.7] (vgl. auch [6]), daß

$\lim_A x = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} a_{nk} x_k$ auf $m \cap c_A$ eine hinreichende und notwendige Bedingung für die Gültigkeit des Satzes von Mazur-Orlicz für konulläre Matrixverfahren ist. In [2, §§5 und 6] wurde gezeigt, daß die entsprechende Voraussetzung auf $|A| \cap c_A$ hinreichend und notwendig für die Gültigkeit des Satzes von Volkov für konulläre Verfahren ist. In Satz 4.10 bzw. 5.7 wird nun gezeigt, daß

$\lim_A x = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} a_{nk} x_k$ auf F_A hinreichend bzw. notwendig für die Gültigkeit des zitierten Satzes vom Mazur-Orlicz-Typ auf F_A ist.

Das Matrixverfahren A besitze die Eigenschaft O, wenn für alle Verfahren B mit $c_B \supseteq m \cap c_A$ aus der Verträglichkeit auf den konvergenten Folgen die Verträglichkeit auf $m \cap c_A$ folgt. A besitze die Eigenschaft J, wenn die konvergenten Folgen c in $m \cap c_A$ bezüglich der FK-Topologie von c_A dicht liegen, d.h. wenn $\overline{c} \supseteq m \cap c_A$ gilt. Die Eigenschaft O wurde von E. Jurimäe in [11, §4] mit der Annahme eingeführt, daß die Eigenschaften O und J äquivalent sind. S.C. Chang bewies in [4, Theorem 3.3], daß zwar die Eigenschaft O die Eigenschaft J impliziert aber die Umkehrung nicht gilt.

Der Satz von Volkov, die Arbeit [4, chapter III] von S.C. Chang und die Tatsache, daß die stetigen linearen Funktionale auf c_A dieselbe Darstellung auf $|A| \cap c_A$ wie auf $m \cap c_A$ haben, legten es in [2] nahe, die zu O und J entsprechenden Eigenschaften $|O|$ und $|J|$ auf dem absolut-A-beschränkten Wirkfeld $|A| \cap c_A$ einzuführen. Nach den Betrachtungen in §4 liegt es ebenso nahe die entsprechenden Eigenschaften O_F und J_F zu definieren. S.C. Chang zeigte in [4], daß alle koregulären Verfahren die Eigenschaften O und J besitzen; dies ist ebenfalls richtig für die Eigenschaften $|O|$, $|J|$, O_F und J_F(vgl. §5 und [2, §6]). In Anlehnung an die Ergebnisse für die Eigenschaften O und J von S.C. Chang in [4] wurde in [2, §6] für konulläre Verfahren sowohl die Äquivalenz von

$\lim_A x = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} a_{nk}x_k$ auf $|A| \cap c_A$ und der Eigenschaft $|0|$ als auch die Äquivalenz der Eigenschaften $|0|$ und $|J|$ unter der Voraussetzung "maximal inset"(Def.vgl.3.2) bewiesen. Die entsprechenden Aussagen sind richtig für die Eigenschaften 0_F und J_F.

S.C. Chang konnte in [4] über die Invarianz (6.1) von 0 und J zeigen, daß für ersetzbare(Def.vgl.1.8) Verfahren die Eigenschaften 0 und J äquivalent sind. Für $|0|$ und $|J|$ konnte diese Aussage in [2] nicht gemacht werden. In §6 wird gezeigt, daß für ersetzbare konulläre Verfahren die Eigenschaften 0_F und J_F äquivalent sind; hieraus kann man vermöge $|J| \setminus |0| \subseteq J_F \setminus 0_F$ die entsprechende Aussage für $|0|$ und $|J|$ gefolgert werden.

Weiter wird in §6 gezeigt, daß konulläre Verfahren A, die "maximal inset" besitzen oder nicht die Eigenschaft J_F($A \notin J_F$)erfüllen, ersetzbar sind, während Verfahren A mit $A \in J_F \setminus 0_F$ nicht ersetzbar sind. Diese Aussagen enthalten die entsprechenden Ergebnisse von S.C. Chang in [4] über Verfahren A mit $A \notin J$ bzw. $A \in J \setminus 0$. Keine Aussage über die Ersetzbarkeit erhält man für Verfahren A, welche die Eigenschaft 0_F aber nicht "maximal inset" besitzen. Weiter wird in 6.11 eine notwendige Bedingung für die Ersetzbarkeit von konullären und koregulären Verfahren gegeben.

Ist $L_A := (x \in c_A : (tA)x$ existiert für alle absolut konvergenten Folgen $t)$, so wird in §7 u.a. mit Hilfe der Nicht-Ersetzbarkeit von $A \in J_F \setminus O_F$ gezeigt, daß, falls F_A abgeschlossen ist, auch L_A abgeschlossen ist.

Im letzten Paragraphen werden die Eigenschaften $O, \ldots, J_F$ miteinander verglichen und Beispiele für die Echtheit der Enthaltenseinsrelation gegeben. Weiter wird gezeigt, daß es ein Matrixverfahren C gibt, das nicht ersetzbar ist, nicht "maximal inset" besitzt und $A \in O_F$ erfüllt.

Herrn Dr. W. Beekmann und
Herrn Prof. Dr. K. Zeller
möchte ich für wertvolle Ratschläge danken.

§1 Bezeichnungen, Definitionen und Bemerkungen

1.1 In den folgenden Paragraphen werden Zahlenfolgen mit $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $z = (z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und Matrixverfahren mit den Buchstaben A, A*, B, B*, C, D, G, H, P und Q bezeichnet, wobei die Elemente der Verfahren mit a_{nk} etc. bezeichnet werden.
Weiter werden folgende Bezeichnungen verwendet:

e:= (1,1,...); e^k:= Folge mit 1 an der k-ten Stelle, und 0 sonst;

s:= Menge der Zahlenfolgen;

m:= Menge der beschränkten Folgen

$= (x \in s: \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| \text{ existiert});$

c:= Menge der konvergenten Folgen

$= (x \in s: \lim_{k\to\infty} x_k \text{ existiert});$

c_o:= Menge der Nullfolgen $= (x \in s: \lim_{k\to\infty} x_k = 0);$

l:= Menge der absolut konvergenten Folgen

$= (x \in s: \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty);$

d_A:= Anwendungsbereich des Matrixverfahrens A

$= (x \in s: \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k \text{ existiert für alle } n\in\mathbb{N});$

c_A:= Wirkfeld des Verfahrens A

$= (x \in d_A: \lim_A x := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k \text{ existiert });$

c_{oA}:= Nullwirkfeld des Verfahrens A $=(x \in c_A: \lim_A x=0)$;

l_A:= absolut konvergentes Wirkfeld von A

$$= (x \in d_A: \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k \right| < \infty);$$

$m \cap c_A$:= beschränktes Wirkfeld des Matrixverfahrens A;

$|A|$:= Menge der absolut-A-beschränkten Folgen

$$= (x \in d_A: \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}x_k| < \infty);$$

$|A| \cap c_A$:= absolut-A-beschränktes Wirkfeld von A;

c_A':= Menge der bzgl. der FK-Topologie von c_A stetigen linearen Funktionale auf c_A .

1.2 Definition:

a) Ein Matrixverfahren heißt konvergenztreu, wenn $c \subseteq c_A$ gilt;

b) A heißt permanent, wenn A konvergenztreu ist und $\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_A x$ für alle $x \in c$ gilt;

c) A heißt nullfolgenpermanent, wenn $\lim_A x = 0$ für alle $x \in c_o$ gilt.

1.3 Bemerkung:

a) Bekanntlich ist A genau dann konvergenztreu, wenn A folgende Eigenschaften besitzt:

(Zn) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$

(Zs) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} =: a$ existiert

(Sp) $\lim_{n\to\infty} a_{nk} =: a_k$ existiert für alle $k\in\mathbb{N}$.

Ist A konvergenztreu, so gilt für alle $x \in c$:

(1) $\lim_A x = \chi(A) \lim_{k\to\infty} x_k + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$

mit $\chi(A) := a - \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

b) A ist genau dann permanent, wenn (Zn), (Zs) mit $a = 1$ und (Sp) mit $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gelten.

c) Aus dem Beweis von a) folgt $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$.

Beweis: [8, chapter III,3.1 theorem 1 and 2].

1.4 Definition:

Ein konvergenztreues Matrixverfahren A heißt konullär, wenn $\chi(A) = 0$ (vgl.1.3a) und koregulär, wenn $\chi(A) \neq 0$ gilt.

Die Begriffe "konullär" und "koregulär" wurden von A. Wilansky in [22, §2] geprägt. Die Unterscheidung von Verfahren mit $\chi(A) = 0$ bzw. $\chi(A) \neq 0$ geht jedoch weiter zurück; z.B. spielte der Ausdruck $\chi(A)$ im Satz von Toeplitz-Silverman(vgl.1.3) eine wesentliche Rolle zur Berechnung von $\lim_A x$ für $x \in c$. Weiter wurde im Jahre 1933 von Mazur und Orlicz in der Arbeit[12] im folgenden Satz zwischen $\chi(A) = 0$ und $\chi(A) \neq 0$ unterschieden:" Sei A permanent (d.h. $\chi(A) = 1$) und $c_B \supseteq c_A$, dann gibt es genau dann eine Matrix C mit $c_A = c_C$ und $\lim_C x = \lim_B x$ auf c_A, wenn

$\chi(B) \neq 0$ gilt."

A. Wilansky ging bei der Definition der Begriffe "konullär" und "koregulär" von der Klasse der t-multiplikativen Matrizen aus; diese sind folgendermaßen definiert:

1.5 Definition:

Ein konvergenztreues Matrixverfahren A heißt t-multiplikativ, wenn es eine komplexe Zahl t mit $\lim_A x = t \cdot \lim_{k\to\infty} x_k$ für alle $x \in c$ gibt.

Folgendes Lemma zeigt, daß die Klasse der konullären Matrixverfahren die t-multiplikativen Verfahren mit $t = 0$ und die Klasse der koregulären Verfahren die t-multiplikativen Matrizen mit $t \neq 0$ enthalten, d.h. 1.4 stellt eine Erweiterung - und wie man leicht sieht, eine echte Erweiterung- von 1.5 dar.

1.6 Lemma: A ist genau dann t-multiplikativ, wenn $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Zusatz: Es gilt $t = \chi(A)$.

Beweis:

"$\Longrightarrow$": Folgt unmittelbar aus (1) durch Einsetzen von e^k für alle $k \in \mathbb{N}$.

"$\Longleftarrow$": Wähle in (1) $t := \chi(A)$.

Die Unterscheidung zwischen konullären und koregulären Matrixverfahren erwies sich als notwendig z.B.

bei Untersuchungen über die Limitierbarkeit von beschränkt-divergenten bzw. unbeschränkten Folgen und über die Darstellung von stetigen linearen Funktionalen auf c_A (vgl. 2.14). In den §§4-8 wird die Bedeutung der Unterscheidung zwischen "konullär" und "koregulär" bei Verträglichkeits- und Ersetzbarkeitsuntersuchungen weiter hervortreten.
Abschließend sei noch bemerkt, daß die Begriffe "konullär" und "koregulär" von A.K. Snyder in [18, §3] auf konvergenztreue FK-Räume, von A. Wilansky in [20, chapter 6, §2] auf FH-Räume und von E. Jurimäe in [10] auf konvergenztreue Reihen-Reihen-FK-Räume und für absolut konvergenztreue FK-Räume verallgemeinert wurden; die aufgezählten Verallgemeinerungen hängen sehr eng zusammen, und es gilt für alle sinngemäß folgendes Lemma.

1.7 Lemma:
Sei A konullär, dann ist B konullär, wenn $c_A \subseteq c_B$ gilt.
Beweis: [26, Satz 6.2a].

Wie schon oben angedeutet wurde, spielen die Eigenschaften "konullär" und "koregulär" eine wesentliche Rolle bei Ersetzbarkeits- und Verträglichkeitsfragen; die letzten Begriffe definieren wir folgendermaßen:

1.8 Definition:

Ein konvergenztreues Matrixverfahren A heißt ersetzbar, wenn es ein t-multiplikatives Verfahren B mit $c_A = c_B$ gibt.

1.9 Definition:

Zwei Matrixverfahren A und B heißen auf $M \subseteq c_A \cap c_B$ verträglich, wenn $\lim_A x = \lim_B x$ für alle $x \in M$ gilt.

Aus Lemma 1.6 und 1.7 erhält man unmittelbar folgendes Lemma.

1.10 Lemma:

Ist A konullär, so ist jedes t-multiplikative Verfahren B mit $c_A = c_B$ konullär und es gilt $t = 0$; ist A koregulär, so ist auch B koregulär und es gilt $t \neq 0$.

In §4 werden wir die Frage stellen, unter welchen Voraussetzungen aus der Verträglichkeit zweier Verfahren A und B auf den konvergenten Folgen die Verträglichkeit auf bestimmten Teilmengen M von $c_A \cap c_B$ folgt. Dabei wird folgendes Lemma wiederholt angewendet.

1.11 Lemma:

Zwei konvergenztreue Verfahren A und B sind genau dann auf den konvergenten Folgen verträglich, wenn $\chi(A) = \chi(B)$ und $a_k = b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Beweis: Folgt unmittelbar aus Gleichung (1) in 1.3.

§2 Das Wirkfeld c_A als FK-Raum und der Dualraum c_A' bezüglich dieser Topologie

FK-Räume wurden von K. Zeller in [26, §§3-5] eingeführt. A. Wilansky und K. Zeller erweiterten durch die FH-Räume diese Klasse lokalkonvexer Räume. Da wir in den folgenden Paragraphen nur FK-Räume betrachten, beschränken wir uns bei dieser kurzen Einführung auf dieselben. Zunächst werden wir F-Räume als Klasse lokalkonvexer Räume einführen.

Aus den Betrachtungen in [7, §4] folgt, daß ein lokalkonvexer Raum X genau dann metrisierbar ist, wenn es eine abzählbare totale Familie $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von Halbnormen auf X gibt, welche die lokalkonvexe Topologie erzeugen. Umgekehrt erzeugt eine totale abzählbare Familie $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von Halbnormen auf dem linearen Raum X eine lokalkonvexe Topologie (bis auf endlich viele Halbnormen können alle identisch null sein); dabei wird eine äquivalente Topologie durch die translationsinvariante Metrik

$$2.1 \qquad d(x,y) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i(x-y)}{2^i(1+p_i(x-y))} \qquad (x,y \in X)$$

erzeugt.

Im folgenden bezeichnen wir einen metrisierbaren lokalkonvexen Raum mit $(X;p_i, i\in\mathbb{N})$ bzw. (X,P).

Im allgemeinen wird die Vollständigkeit von lokal-

konvexen Räumen über Cauchynetze definiert. In metrisierbaren lokalkonvexen Räumen genügt es jedoch Cauchyfolgen zu betrachten.

2.2 Definition:

Eine Folge $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchyfolge in (X,P), wenn $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ für alle $p \in P$ eine Cauchyfolge ist. Entsprechend seien konvergente Folgen in (X,P) definiert.

2.3 Definition:

(X,P) heißt vollständig, wenn alle Cauchyfolgen konvergieren.

Wir kommen zur Definition der F-Räume.

2.4 Definition:

Ein vollständiger metrisierbarer lokalkonvexer Raum heißt Fréchet-Raum(F-Raum).

2.5 Beispiele:

a) Jeder Banach-Raum $(X, \|\cdot\|)$ ist ein F-Raum;

b) $(s;q_j, j\in\mathbb{N})$ mit $q_j = |x_j|$ für $j\in\mathbb{N}$ ist ein F-Raum.

Nach dieser Vorbereitung betrachten wir FK-Räume.

2.6 Definition:

Ein FK-Raum ist ein F-Raum (X,P) mit folgenden Eigenschaften:

i) X ist ein linearer Koordinatenraum, d.h. $X \leq s$

ii) Die Injektion $i:(X,P) \longrightarrow (s;q_j, j\in\mathbb{N})$ ist stetig, d.h. die X-Topologie ist stärker als die von s auf X induzierte Topologie(q_j vgl. 2.5b).

A. Wilansky und K. Zeller erweiterten in [25] die Klasse der FK-Räume zur Klasse der FH-Räume, indem sie in 2.6 statt $(s;q_j, j\in\mathbb{N})$ einen beliebigen linearen Hausdorff-Raum betrachteten.

2.7 Beispiele:

a) $(s;q_j, j\in\mathbb{N})$, $(c_o, \|x\|_\infty := \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j|)$, $(c, \|\cdot\|_\infty)$, $(m, \|\cdot\|_\infty)$ und $(l, \|x\| := \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|)$ sind FK-Räume.

b) Ist A ein konvergenztreues Matrixverfahren, so bildet $|A|$ bzw. $|A| \cap c_A$ zusammen mit den Halbnormen

$$q_j(x) := |x_j| \quad \text{für alle } j\in\mathbb{N}$$

und

$$q(x) := \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}x_k|$$

einen FK-Raum(vgl.[2, 2.11]).

2.8 Bemerkung:

Sind (X,P) und (Y,Q) FK-Räume mit $X \leq Y$, so ist die Topologie von X stärker als die von Y auf X induzierte Topologie. Insbesondere folgt für X = Y, daß die FK-Topologie von FK-Räumen bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt ist. Beim Beweis wird auf die Injektion $i:(X,P) \longrightarrow (Y,Q)$ der "Satz vom abge-

schlossenen Graphen" angewendet(vgl.z.B. [20,11.3]).

Die folgenden Sätze, welche auf A. Wilansky und K. Zeller zurückgehen, werden für den Beweis benötigt, daß das Wirkfeld c_A eines Matrixverfahrens A zusammen mit geeigneten Halbnormen einen FK-Raum bildet.

2.9 Satz:

Sei $((X_n;p_j^n, j\in\mathbb{N}))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von FK-Räumen, dann ist $(X:=\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n;p_j^n;j,n\in\mathbb{N})$ ein FK-Raum.

Beweis: [20,11.3 Theorem 3] bzw. [25, Theorem 2].

2.10 Satz:

Jede Matrixabbildung zwischen FK-Räumen ist stetig.

Beweis: [20, 11.3 corollary 5].

Der folgende Satz gibt die Möglichkeit aus bekannten FK-Räumen durch stetige lineare Abbildungen weitere FK-Räume zu erzeugen; insbesondere können nach 2.10 Matrixabbildungen dazu verwendet werden.

2.11 Satz:

Seien $(X;P)$ und $(Y;r_i,i\in\mathbb{N})$ FK-Räume und $u:(X,P)\longrightarrow(s;q_j,j\in\mathbb{N})$ eine stetige lineare Abbildung, dann ist $(u^{-1}[Y];P;r_i\circ u,i\in\mathbb{N})$ ein FK-Raum.

Ist u zusätzlich bijektiv, so genügen schon die Halbnormen $r_i\circ u$ $(i\in\mathbb{N})$ zur Erzeugung der FK-Topologie von $u^{-1}[Y]$.

Beweis: [20, 12.4 Theorem 1] bzw. [25, Theorem 5]. In 2.6 ist lediglich die Vollständigkeit nicht sofort zu sehen.

Sei $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(u^{-1}[Y];P:,r_i\cdot u, i\in\mathbb{N})$; dann gilt nach 2.6 und 2.8:

i) $x^{(n)} \longrightarrow a$ für $n\to\infty$ in $(X;P)$

ii) $u(x^{(n)})\to u(a)$ für $n\to\infty$ in $(s;q_j, j\in\mathbb{N})$

iii) $u(x^{(n)})\longrightarrow b$ für $n\to\infty$ in $(Y;r_i, i\in\mathbb{N})$.

Da $(s;q_j, j\in\mathbb{N})$ separiert ist, gilt $u(a) = b$ und damit $a\in u^{-1}[Y]$.

Der Zusatz folgt aus der Eindeutigkeit der FK-Topologie und dem Satz über das "Weglassen" von überflüssigen definierenden Halbnormen(vgl.[26,Satz 3.3]).

Als Folgerungen aus 2.9 - 2.11 erhalten wir, daß d_A bzw. c_A zusammen mit geeigneten Halbnormen FK-Räume sind.

2.12 Satz:

Der Anwendungsbereich d_A eines Matrixverfahrens A bildet zusammen mit den Halbnormen

$$q_j(x) := |x_j| \quad \text{für alle } j\in\mathbb{N}$$

und

$$p_n(x) := \sup_{m\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=1}^{m} a_{nk}x_k \right| \quad \text{für alle } n\in\mathbb{N}$$

einen FK-Raum.

Beweis: [20, 12.4 Lemma 2].

Definiert man für alle $m\in\mathbb{N}$ die Verfahren

$B_n = (b_{mk})_{m,k\in\mathbb{N}}$ durch

$$b_{mk} := \begin{cases} a_{nk} & \text{für } k \leq m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

dann gilt $d_{B_n} = s$. Setzt man in 2.11 $X := d_{B_n} = s$ und $Y := c$ (jeweils als FK-Raum), so ist $(c_{B_n}; p_n; q_j, j \in \mathbb{N})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ein FK-Raum. Aus $d_A := \bigcap_{n=1}^{\infty} c_{B_n}$ und 2.9 folgt unmittelbar die Behauptung.

Setzt man in 2.11 $u := A$, $X := d_A$ und $Y := c$ (c und d_A als FK-Räume), so erhält man folgenden Satz:

2.13 Satz:

Das Wirkfeld c_A eines Matrixverfahrens bildet zusammen mit folgenden Halbnormen einen FK-Raum:

q_j, p_n für alle $j,n \in \mathbb{N}$ definiert wie in 2.12

und $p(x) := \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \right|$.

Zusatz: Ist A normal, d.h. $a_{nn} \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a_{nk} = 0$ für $k > n$, so ist schon (c_A, p) ein FK-Raum.

Beweis: [26, Satz 5.1] bzw. [20, 12.4 Theorem 2].

Im folgenden wird der FK-Raum $(c_A; p; q_j, p_n : j,n \in \mathbb{N})$ mit c_A bezeichnet; es wird jeweils aus dem Zusammenhang hervorgehen, ob c_A als Menge oder als topologischer Raum betrachtet wird (entsprechend bei c, d_A).

Der folgende Satz gibt eine Darstellung der stetigen linearen Funktionale auf c_A, die in die folgenden Paragraphen stark eingehen wird.

2.14 Satz:

a) Für alle $g \in c'$ gibt es ein $\alpha \in \mathbb{C}$ und ein $t \in l$ derart, daß

$$g(x) = \alpha \cdot \lim_{k\to\infty} x_k + \sum_{k=1}^{\infty} t_k x_k$$

für alle $x \in c$ gilt.

b) Für alle $h \in d_A^{\prime}$ gibt es $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \in s$ derart, daß

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k$$

für alle $x \in d_A$ gilt.

c) Für alle $f \in c_A^{\prime}$ gibt es ein $\alpha \in \mathbb{C}$, $t \in l$ und $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \in s$ derart, daß

$$f(x) = \alpha \cdot \lim\nolimits_A x + \sum_{n=1}^{\infty} t_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k$$

für alle $x \in c_A$ gilt(dabei soll die letzte Reihe auf c_A existieren).

Zusatz: Ist A normal, so kann α und $t \in l$ so gewählt werden, daß $\alpha_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

d) Für alle $f \in c_A^{\prime}$ gilt

$$\chi(f) := f(e) - \sum_{k=1}^{\infty} f(e^k) = \alpha \cdot \chi(A),$$

wobei $\alpha \in \mathbb{C}$ durch die Darstellung in c) bestimmt ist.

Bemerkung: Aus d) folgt insbesondere, daß α in der Darstellung von $f \in c_A'$ für koreguläre Matrixverfahren eindeutig bestimmt ist, während dies für konulläre Verfahren nicht notwendig der Fall ist.

Beweis:

a) [20, 6.4 Beispiel 5]

Zum Beweis verwendet man, daß

$$x = e \cdot \lim_{k\to\infty} x_k + \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - \lim_{n\to\infty} x_n) e^k$$

für alle $x \in c$ gilt.

b) [20, 12.4 Beweis von Theorem 6]

Da $(e^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Schauder-Basis von d_A ist, kann $\alpha_k = h(e^k)$ für alle $h \in d_A'$ und alle $k \in \mathbb{N}$ gewählt werden.

c) [26, Satz 5.2] bzw. [20, 12.4 Theorem 6]

Allgemein gilt in lokalkonvexen Räumen (X,P): Ein lineares Funktional f auf X ist genau dann stetig, wenn es ein $M > 0$ und $p_1, \ldots, p_n \in P$ mit

$$|f(x)| \leq M \sum_{i=1}^{n} p_i(x) \quad \text{gibt.}$$

Damit kann man zeigen, daß $f \in c_A'$ genau dann gilt, wenn sich f durch $f = g \circ A + h$ mit $h \in d_A'$ und $g \in c'$ darstellen läßt. Der Zusatz folgt aus dem Zusatz von 2.13 und dem Beweis von c).

d) [26, Satz 5.3 und 5.8]. Die Behauptung folgt, wenn man e und e^k in die Darstellung in c) einsetzt.

Bei der Betrachtung von Perfektheitseigenschaften werden wir des öfteren folgendes Lemma anwenden.

2.15 Lemma:

Seien X und Y mit $X \leq Y$ lineare Teilräume von c_A; X ist genau dann in Y bzgl. der FK-Topologie von c_A dicht, d.h. es gilt $\overline{X} \supseteq Y$, wenn für alle $f \in c_A'$ mit $f(x) = 0$ auf X folgt, daß $f(x) = 0$ auf Y gilt.

Beweis:

"$\Longrightarrow$": Sei $\overline{X} \supseteq Y$ und $f \in c_A'$ mit $f(x) = 0$ auf X; angenommen es gelte $f(x^{(o)}) \neq 0$ für ein $x^{(o)} \in Y \setminus X$, dann ist der Kern von f nicht abgeschlossen, was ein Widerspruch zur Stetigkeit von f ist.

"$\Longleftarrow$": Für alle $f \in c_A'$ mit $f(x) = 0$ auf X folge $f(x) = 0$ auf Y und es gelte $\overline{X} \not\supseteq Y$. Für ein beliebiges $x^{(o)} \in Y$ mit $x^{(o)} \notin \overline{X}$ definiert man

$f(x) := f(\alpha x^{(o)} + y) = \alpha$ auf $M := (x = \alpha x^{(o)} + y: \alpha \in \mathbb{C}, y \in \overline{X})$.

Die auf diese Weise wohldefinierte Abbildung f ist linear und stetig bzgl. der von c_A induzierten Topologie und kann nach dem Fortsetzungssatz von Hahn-Banach stetig und linear fortgesetzt werden zu einem stetigen und linearen Funktional auf c_A. Aus $f(x) = 0$ auf X und $f(x^{(o)}) = 1$ ergibt sich ein Widerspruch zu $f(x) = 0$ auf Y, woraus $\overline{X} \supseteq Y$ folgt.

§3 Ausgezeichnete Teilmengen des Wirkfelds c_A eines Matrixverfahrens A

Diesem Paragraphen liegen Ausschnitte aus der Arbeit [24] von A. Wilansky zugrunde. Zunächst definieren wir die "ausgezeichneten Teilmengen" und indizieren die einzelnen Mengen mit dem Buchstaben des Matrixverfahrens, das betrachtet wird.

3.1 Definition:

$$F_A := (x \in c_A : \sum_{k=1}^{\infty} x_k f(e^k) \text{ existiert für alle } f \in c_A^!);$$

$$L_A := (x \in c_A : (tA)x = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} t_n a_{nk} x_k \text{ existiert für alle } t \in l);$$

$$I_A := (x \in c_A : \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \text{ existiert; } a_k := \lim_{n\to\infty} a_{nk});$$

$$B_A := (x \in c_A : \sup_{r,n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=1}^{r} a_{nk} x_k \right| < \infty);$$

$$B_A^* := (x \in c_A : \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=m}^{\infty} a_{nk} x_k \right| < \infty);$$

$$S_A := (x \in c_A : x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e^k)$$

$$W_A := (x \in c_A : f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k f(e^k) \text{ für alle } f \in c_A^!, \text{ d.h. } \sum_{k=1}^{\infty} x_k e^k \text{ ist schwach konvergent});$$

$P_A := (x \in c_A$: $(tA)x = t(Ax)$ für alle $t \in l$ für welche $(tA)y$ existiert für alle $y \in c_A)$.

In der Arbeit [28] von K. Zeller wurden F_A, S_A und W_A bezeichnet als die Menge der $x \in c_A$ mit FAK, AK und SAK, wobei

FAK:= funktionale Abschnittskonvergenz

AK:= Abschnittskonvergenz

SAK:= schwache Abschnittskonvergenz.

In [23] bezeichnete A. Wilansky I_A mit "inset". Ebenfalls von A. Wilansky stammt der Begriff der " maximal inset Matrixverfahren":

3.2 Definition:

A hat "maximal inset", wenn $I_A = c_A$ gilt.

Im Hinblick auf §§ 4-8 werden wir die in 3.1 definierten Mengen bzgl. der Enthaltenseinsrelation untersuchen; insbesondere werden wir das absolut-A-beschränkte Wirkfeld $|A| \cap c_A$ in diese Mengen einordnen(vgl. [2, Satz 3.3]).

3.3 Lemma: Ist A konvergenztreu, so gilt

a) $L_A = B_A = B_A^*$ und

b) $F_A = L_A \cap I_A$.

Beweis:

a) $B_A = B_A^*$ folgt unmittelbar aus der Definition und $L_A = B_A$ ist die Behauptung in [24, Lemma 4.2].

b) [24, Lemma 4.3].

3.4 Lemma:

Sei A ein konvergenztreues Matrixverfahren, dann gilt:

a) $|A| \cap c_A \subseteq B_A = L_A$ und

b) $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| < \infty$ für alle $x \in |A| \cap c_A$; insbesondere gilt also $|A| \cap c_A \subseteq I_A$.

Beweis(vgl.[2,3.3]):

a) Für alle $x \in |A| \cap c_A$ gilt

$$\sup_{r,n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=1}^{r} a_{nk} x_k \right| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} x_k| < \infty .$$

b) Sei $x \in |A| \cap c_A$, dann gilt $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| < \infty$ genau dann, wenn es ein $M' > 0$ mit $\sum_{k=1}^{N} |a_k x_k| < M'$ unabhängig von $N \in \mathbb{N}$ gibt.

Es gilt
$$\sum_{k=1}^{N} |a_k x_k| = \sum_{k=1}^{N} |a_k - a_{nk} + a_{nk}||x_k|$$
$$\leq \sum_{k=1}^{N} |a_k - a_{nk}||x_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} x_k|$$
$$\leq \max_{k=1,\ldots,N} |x_k| \sum_{k=1}^{N} |a_k - a_{nk}| + M ;$$

dabei kann $M > 0$ wegen $x \in |A| \cap c_A$ unabhängig von $n \in \mathbb{N}$ gewählt werden. Da $(a_k - a_{nk})_{n \in \mathbb{N}}$ laut Voraussetzung für alle $k \in \mathbb{N}$ eine Nullfolge ist, gibt es ein $N_0(k,N) \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $n \geq N_0(k,N)$ und $k = 1,\ldots,N$

$$|a_k - a_{nk}| < (N \cdot \max_{k=1,\ldots,N} (|x_k| + 1))^{-1} \text{ gilt.}$$

Damit erhält man unabhängig von $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{N} |a_k x_k| < 1 + M =: M' ,$$

woraus die Behauptung folgt.

$|A| \cap c_A \subseteq I_A$ gilt, da die absolute Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ die Konvergenz impliziert.

3.5 Lemma:

Ist A konvergenztreu, so gilt

a) $t(Ax) = (tA)x$ für alle $x \in L_A$ und $t \in l$ und

b) $L_A \subseteq P_A$.

Beweis:

a) (vgl. [23, Lemma 13]); $f(t) := (tA)x$ ist für ein festes $x \in L_A$ ein stetiges lineares Funktional auf dem FK-Raum l (vgl. 2.7) und es gilt

$$(tA)x = f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n f(e^n) = t(Ax) .$$

b) $L_A \subseteq P_A$ folgt mit den Definitionen von L_A und P_A unmittelbar aus a).

Aus diesen vorbereitenden Lemmata erhalten wir den folgenden Satz:

3.6 Satz:

Ist A konvergenztreu, dann gilt

a) $c \subseteq m \cap c_A \subseteq |A| \cap c_A \subseteq F_A = L_A \cap I_A \subseteq P_A$ und

b) $S_A \subseteq W_A \subseteq F_A \subseteq L_A \subseteq P_A$.

Aus den Relationen in 3.6a und Lemma 3.5 erhalten wir auf F_A eine einfachere Darstellung der stetigen linearen Funktionale auf c_A; diese Darstellung geht auf A. Wilansky in [20, Lemma 5.3] zurück und wird in den Paragraphen 5-8 eine wesentliche Rolle spielen.

3.7 Satz:

Sei A konvergenztreu und f ein stetiges lineares Funktional auf c_A; ist $\alpha \in \mathbb{C}$ gegeben durch eine Darstellung von f in 2.14c, dann gilt

$$f(x) = \alpha(\lim_A x - \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k) + \sum_{k=1}^{\infty} x_k f(e^k)$$

für alle $x \in F_A \supseteq |A| \cap c_A \supseteq m \cap c_A$.

Beweis([24, Lemma 5.3]):

Nach 2.14c gibt es ein $\alpha \in \mathbb{C}$, $t \in l$ und $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}} \in s$ derart, daß für alle $x \in c_A$

(*) $\quad f(x) = \alpha \lim_A x + t(Ax) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k$ gilt.

Insbesondere gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$f(e^k) = \alpha a_k + \alpha_k + \sum_{n=1}^{\infty} t_n a_{nk} \quad ,$$

woraus wegen $F_A = L_A \cap I_A$ und der Existenz von $(tA)x$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k f(e^k) - (tA)x - \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$$

für alle $x \in F_A$ folgt. Dies in (*) eingesetzt ergibt wegen Lemma 3.5 die Behauptung.

§4 Sätze vom Mazur-Orlicz-Typ

In diesem Paragraphen wird die Frage untersucht, unter welchen Voraussetzungen zwei auf den konvergenten Folgen verträgliche Verfahren A und B bzgl. einer bestimmten Klasse von Folgen, die in beiden Wirkfeldern enthalten ist, verträglich sind. Daß die Verträglichkeit für beliebige Klassen unter den obigen Voraussetzungen nicht immer gilt, hat R.P. Agnew in [1] durch folgenden Satz bewiesen: "Zu einer gegebenen beschränkt-divergenten Folge kann eine permanente Mittelbildung so bestimmt werden, daß die vorgegebene Folge in eine beliebige Folge transformiert wird". Gibt man sich eine beschränkt-divergente Folge x und zwei konvergente Folgen y und z mit $\lim_{k\to\infty} y_k \neq \lim_{k\to\infty} z_k$ vor, so können nach dem zitierten Satz zwei permanente Verfahren A und B so bestimmt werden, daß Ax = y und Bx = z gilt, woraus folgt, daß A und B bzgl. (x) nicht verträglich sind.

Zunächst betrachten wir nur koreguläre Verfahren. S. Mazur und W. Orlicz haben unabhängig von A.L. Brudno die gestellte Frage für das beschränkte Wirkfeld untersucht und sind zu folgendem Ergebnis gekommen:

4.1 Satz:

Seien A und B auf den konvergenten Folgen verträgliche Matrixverfahren und sei A koregulär (nach 1.11 ist auch B koregulär), dann folgt aus $c_B \supseteq m \cap c_A$ die Verträglichkeit von A und B auf $m \cap c_A$.

Beweis:

S. Mazur und W. Orlicz [13, Theorem 2] bzw. A.L. Brudno [3, Theorem].

S. Mazur und W. Orlicz führten den Beweis auf den folgenden Satz für das beschränkte Nullwirkfeld zurück, indem sie diesen Satz auf die Verfahren

$$A^* := (\chi(A))^{-1} (a_{nk} - a_k)_{n,k\in\mathbb{N}} \quad \text{und}$$
$$B^* := (\chi(B))^{-1} (b_{nk} - b_k)_{n,k\in\mathbb{N}}$$

anwendeten.

4.2 Satz([13, Theorem 1]):

Seien A^* und B^* nullfolgenpermanente Verfahren mit $c_{B^*} \supseteq c_{oA^*} \cap m$, dann sind A^* und B^* auf $m \cap c_{oA^*}$ verträglich.

Nach [13, 2.3] genügt es, diesen Satz für normale Verfahren zu beweisen. S. Mazur und W. Orlicz führten den Beweis von 4.2 funktionalanalytisch, wozu wie im Beweis von A.L. Brudno eine ziemlich aufwendige Konstruktion verwendet wird.

A.L. Brudno verwendete zum Beweis von 4.1 die Methode des "gleitenden Buckels", auf die in den folgenden Sätzen noch weiter eingegangen wird. G.M. Petersen hat in [15] den Beweis von A.L. Brudno vereinfacht und in [16] einen weiteren Beweis von Satz 4.1 gegeben.

In der Arbeit [19, Satz1] wurde von I.I.Volkov Satz 4.1 für permanente Verfahren A auf das absolut-A-beschränkte Wirkfeld $|A| \cap c_A$ verallgemeinert, wobei er die Beweiskonstruktion von A.L. Brudno verwendete.

4.3 Satz:

Seien A und B permanente Matrixverfahren mit $|B| \cap c_B \supseteq |A| \cap c_A$, dann sind A und B auf $|A| \cap c_A$ verträglich.

Beweis: [19, Satz 1].

Wendet man den Beweis von I.I. Volkov auf die Verfahren $A^* := (a_{nk} - a_k)_{n,k \in \mathbb{N}}$ und

$B^* := (b_{nk} - b_k)_{n,k \in \mathbb{N}}$

an und berücksichtigt, daß nach 3.4b für alle $x \in |A| \cap c_A$ die Beziehung

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| < \infty$$

gilt, so erhält man Satz 4.3 für den koregulären Fall:

4.3 Satz:*)

Seien A und B auf den konvergenten Folgen verträgliche Matrixverfahren und sei A koregulär, dann folgt aus $|A| \cap c_A \subseteq |B| \cap c_B$ die Verträglichkeit von A und B auf $|A| \cap c_A$.

Beweis: [2, Satz 5.5 und 5.6].

Ist F_A definiert wie in 3.1, so kann 4.4 auf F_A verallgemeinert werden; dabei wird im Beweis eine Konstruktion von K. Zeller in [27, Satz 3.2] verwendet. Die Beweiskonstruktion von I.I. Volkov bzw. A.L. Brudno kann nicht verwendet werden, da $x \in F_A$ nur die Abschätzung

$$\sup_{m,n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=1}^{m} a_{nk}x_k \right| < \infty$$

und nicht wie $x \in |A| \cap c_A$ die Abschätzung

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}x_k| < \infty$$

liefert; der Aufbau des Beweises zeigt jedoch deutliche Parallelen zum Beweis von 4.4.

4.4 Satz:

Seien A und B auf den konvergenten Folgen verträgliche Matrixverfahren und sei A koregulär, dann folgt aus $F_A \subseteq c_B$ die Verträglichkeit von A und B auf F_A.

---

*) In Satz 4.7 wird der entsprechende Satz unter der Voraussetzung $|A| \cap c_A \subseteq c_B$ bewiesen.

Mit der Beweiskonstruktion, die zum Beweis von Satz 4.5 verwendet wird, können gleichzeitig die Sätze 4.4 und 4.1 bewiesen werden, falls an zwei Stellen des Beweises Fallunterscheidungen gemacht werden. Zunächst bringen wir die Sätze 4.1, 4.4 und 4.5 auf einen Nenner.

4.6 Bezeichnungen:

A und B seien im folgenden konvergenztreue Verfahren; weiter seien A^* und B^* definiert durch

$$A^* := (a^*_{nk})_{n,k\in\mathbb{N}} = (a_{nk} - a_k)_{n,k\in\mathbb{N}} \quad \text{und}$$

$$B^* := (b^*_{nk})_{n,k\in\mathbb{N}} = (b_{nk} - b_k)_{n,k\in\mathbb{N}} ,$$

wobei $a_k := \lim\limits_{n\to\infty} a_{nk}$ und $b_k := \lim\limits_{n\to\infty} b_{nk}$ gilt.

Seien $\mathfrak{A}_1 := m \cap c_A$, $\mathfrak{A}_2 := |A| \cap c_A$, $\mathfrak{A}_3 := F_A$ und sei $\mathfrak{A}^*_i$ für i = 1,2,3 entsprechend definiert.

In den Sätzen 4.7 und 4.8 sei $i \in (1,2,3)$ fest gewählt.

4.7 Satz:

Seien A und B auf den konvergenten Folgen verträglich und A koregulär, dann folgt aus $\mathfrak{A}_i \subseteq c_B$ die Verträglichkeit von A und B auf $\mathfrak{A}_i$.

Bemerkung: i = 1 liefert Satz 4.1, i = 2 Satz 4.4 und i = 3 Satz 4.5.

Beweisen werden wir den zu 4.7 äquivalenten Satz:

4.8 Satz:

Seien A und B auf den konvergenten Folgen verträglich und sei A koregulär. Gibt es eine Folge $x \in \mathcal{A}_i \cap c_B$ mit $\lim_A x \neq \lim_B x$, dann gibt es eine Folge $y \in \mathcal{A}_i$ mit $y \notin c_B$.

Zum Beweis von Satz 4.8 verwenden wir das folgende Lemma, welches in dieser Form aus [27, Satz 3.2] folgt; Satz 3.2 in [27] liefert jedoch keine spezielle Folge $\varepsilon = (\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit den im folgenden Lemma genannten Eigenschaften. Anschließend an den Beweis des Lemmas zeigen wir, daß $y := (x_k \varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $x \in \mathcal{A}_i \cap c_B$ und $\lim_A x \neq \lim_B x$ die in Satz 4.8 geforderten Eigenschaften besitzt.

4.9 Lemma:

Seien C und D Matrixverfahren mit den folgenden Eigenschaften:

(Zr) $\sup_{m,n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=1}^{m} c_{nk} \right| < M';$

(Sp_0) $0 = \lim_{n \to \infty} c_{nk} =: c_k$ und $0 = \lim_{n \to \infty} d_{nk} =: d_k$,

(Zs) $0 = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} =: c$ und $1 = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} d_{nk} =: d,$

wobei die einzelnen Summen existieren.

unter diesen Voraussetzungen gibt es ein $\varepsilon = (\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\varepsilon \in c_C$ und $\varepsilon \notin c_D$.

Bemerkung: Insbesondere gilt $\chi(C) = 0$ und $\chi(D) = 1$.

Beweis:

a) Die Matrixverfahren $G = (g_{nl})_{n,l \in \mathbb{N}}$ und $H = (h_{nl})_{n,l \in \mathbb{N}}$ seien definiert durch

$$g_{nl} := \sum_{k=l}^{\infty} c_{nk} \quad \text{und} \quad h_{nl} := \sum_{k=l}^{\infty} d_{nk} \quad \text{für alle } n,l \in \mathbb{N}.$$

G und H besitzen folgende Eigenschaften:

(1) $|g_{nl}| < M$ für alle $n,l \in \mathbb{N}$, da C die Eigenschaft (Zr) erfüllt;

(2) $\lim_{l\to\infty} g_{nl} = 0 = \lim_{l\to\infty} h_{nl}$ für alle $n \in \mathbb{N}$;

(3) $\lim_{n\to\infty} g_{nl} = 0$ und $\lim_{n\to\infty} h_{nl} = 1$ für alle $l \in \mathbb{N}$, da C und D die Eigenschaft (Sp_o) und (Zs) mit $c = 0$ und $d = 1$ erfüllen.

b) Konstruktion einer Indexfolge $(q_j)_{j \in \mathbb{N}}$ und einer Hilfsindexfolge $(n_j)_{j \in \mathbb{N}}$ (vgl. [27, Satz 3.2]

Im Hinblick auf den Beweis von Satz 4.8 betrachten wir in der folgenden Konstruktion zusätzlich eine Folge $(g_l)_{l \in \mathbb{N}}$ mit $\lim g_l = 0$; diese Folge wird den Beweis des Lemmas nicht weiter beeinflussen.

Sei $(\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}}$ mit

(4) $\alpha_j > 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$, $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j < \infty$ und $j \cdot \alpha_j = o(1)$

vorgegeben; dabei kann nach (1) α_1 derart gewählt werden, daß

(5) $|g_{n1}| < \alpha_1$ für alle $n,1 \in \mathbb{N}$, $|h_{n1}| < \alpha_1$ für $n=1$ und alle $1 \in \mathbb{N}$, $|h_{n1} - 1| < \alpha_1$ für $1=1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ und $|g_1| < \alpha_1$ für alle $1 \in \mathbb{N}$ gilt.

Sei $q_1 = 1 = n_1$ und seien $q_1,\ldots,q_{j-1},n_1,\ldots,n_{j-1}$ für ein $j > 1$ bestimmt, dann kann nach (2) $q_j > q_{j-1}$ so gewählt werden, daß

(6) $|g_{n1}| < \alpha_j$, $|h_{n1}| < \alpha_j$ für alle $1 \geq q_j$ und $n \leq n_j$ und $|g_1| < \alpha_j$ für alle $1 \geq q_j$ gilt.

Damit kann nach (3),und da nur endlich viele Folgen betrachtet werden, n_j mit $n_j > n_{j-1}$ derart gewählt werden, daß

(7) $|g_{n1}| < \alpha_j$ und $|h_{n1} - 1| < \alpha_j$

für alle $1 \leq q_j$ und $n \geq n_j$ gilt.
Damit sind die streng monotonen Indexfolgen $(q_j)_{j \in \mathbb{N}}$ und $(n_j)_{j \in \mathbb{N}}$ induktiv bestimmt.

c) Konstruktion der Folge $\varepsilon = (\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$

ε wird wie von I.I. Volkov in [19, Satz 1] bzw. von G.M. Petersen in [15] konstruiert.
Die Glieder der Folge $(F_p)_{p \in \mathbb{N}}$ seien definiert durch die Partialsummen der Reihe

(8) $$1 - 1 + 1/2 + 1/2 - 1/2 - 1/2 +\ldots+ 1/n +\ldots+1/n - 1/n -\ldots- 1/n +\ldots \quad ,$$

wobei das Glied $1/n$ n-mal mit positivem und n-mal mit

negativem Vorzeichen auftritt.

$(F_j)_{j\in\mathbb{N}}$ hat folgende Eigenschaften:

(9) $0 \le F_j \le 1$ für alle $j\in\mathbb{N}$;

(10) $F_j = 0$ für alle $j\in\mathbb{N}$ mit $j := q(q+1)$ und $q\in\mathbb{N}$;

(11) $F_j = 1$ für alle $j\in\mathbb{N}$ mit $j := q^2$ und $q\in\mathbb{N}$.

Die Folgen $\varepsilon = (\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $u = (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ seien definiert durch

(12) $\varepsilon_k := F_j$ für alle $k\in\mathbb{N}$ mit $q_j \le k < q_{j+1}$ und

(13) $u_k := \varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}$ mit $\varepsilon_0 = 0$ und $k\in\mathbb{N}$.

Man verifiziert leicht, daß

(14) $u_k = 0$ für $k \neq q_j$ $(j\in\mathbb{N})$ und $\lim_{k\to\infty} u_k = 0$ gilt.

d) In den folgenden Beweisschritten i) - iii) wird gezeigt, daß ε die Forderungen $\varepsilon \in c_C$ und $\varepsilon \notin c_D$ erfüllt.

i) Wir zeigen zunächst $u \in c_G$ und $\lim_G u = 0$.

Aus (14), (6), (7) und (1) folgt für alle $j\in\mathbb{N}$ und $n\in\mathbb{N}$ mit $n_{j-1} < n \le n_j$

$$\left|\sum_{l=1}^{\infty} g_{nl}u_l\right| \le \sum_{l=1}^{\infty} |g_{nl}u_l| = \sum_{v=1}^{\infty} |g_{nq_v}u_{q_v}|$$

$$\le \sum_{v=1}^{j-1} |g_{nq_v}u_{q_v}| + |g_{nq_j}u_{q_j}| + \sum_{v=j+1}^{\infty} |g_{nq_v}u_{q_v}|$$

$$\le \alpha_{j-1}(j-1)\sup_{l\in\mathbb{N}} |u_l| + M|u_{q_j}| + \sup_{l\in\mathbb{N}} |u_l| \sum_{v=j+1}^{\infty} \alpha_v .$$

Die letzten drei Ausdrücke konvergieren für $j \to \infty$ gegen null, da die Folge $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ entsprechend gewählt wurde(vgl. (4)) und (14) gilt.
Damit ist aber $\lim_G u = 0$ gezeigt.

ii) Aus i) folgt $\varepsilon \in c_C$ und $\lim_C \varepsilon = \lim_G u = 0$, da für alle $r,n \in \mathbb{N}$ wegen (2) und $0 \leq \varepsilon_r \leq 1$ (vgl. (9) und (12))

$$(15) \quad \sum_{k=1}^{r} c_{nk}\varepsilon_k = \sum_{l=1}^{r} g_{nl}u_l - g_{n,r+1}\varepsilon_r \quad \text{und somit}$$

$$(16) \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk}\varepsilon_k = \sum_{l=1}^{\infty} g_{nl}u_l$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

iii) Es bleibt $\varepsilon \notin c_D$ zu zeigen; da für alle $n \in \mathbb{N}$ die Konvergenz der Reihen $\sum_{l=1}^{\infty} h_{nl}u_l$ wegen (4) und

$$(17) \quad \sum_{l=q_{j+1}}^{\infty} |h_{nl}u_l| = \sum_{v=j+1}^{\infty} |h_{nq_v}u_{q_v}| \leq \sup_{l \in \mathbb{N}} |u_l| \sum_{v=j+1}^{\infty} \alpha_v$$

für alle $j \in \mathbb{N}$ gesichert ist, genügt es nach (15) und (16) (angewendet auf D und H)

$$(18) \quad \sum_{l=1}^{\infty} h_{n_j l}u_l \longrightarrow \begin{cases} 0 \text{ für } j = q(q+1) \to \infty \\ 1 \text{ für } j = q^2 \to \infty \end{cases}$$

zu zeigen.

Für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left| \sum_{l=1}^{\infty} h_{n_j l} u_l \right| = \left| \sum_{\nu=1}^{\infty} h_{n_j q_\nu} u_{q_\nu} \right|$$

$$\leq \left| \sum_{\nu=1}^{j} h_{n_j q_\nu} u_{q_\nu} \right| + \sum_{\nu=j+1}^{\infty} \left| h_{n_j q_\nu} u_{q_\nu} \right| . \tag{19}$$

Der letzte Term strebt wegen (4) und (14) für $j \to \infty$ gegen null (vgl. (17)).

Aus (10) - (14) erhält man

$$\sum_{\nu=1}^{j} u_{q_\nu} = \begin{cases} 0 & \text{für } j := q(q+1) \text{ und } q \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{für } j := q^2 \text{ und } q \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{20}$$

Berücksichtigt man die Abschätzung

$$\left| \sum_{\nu=1}^{j} (h_{n_j q_\nu} - 1) u_{q_\nu} \right| \leq \sup_{l \in \mathbb{N}} |u_l| \sum_{\nu=1}^{j} |h_{n_j q_\nu} - 1|$$

$$\leq j \, \alpha_j \sup_{l \in \mathbb{N}} |u_l|$$

und $j \cdot \alpha_j \longrightarrow 0$ für $j \to \infty$, so erhält man aus (20) und

$$\sum_{\nu=1}^{j} h_{n_j q_\nu} u_{q_\nu} = \sum_{\nu=1}^{j} (h_{n_j q_\nu} - 1) u_{q_\nu} + \sum_{\nu=1}^{j} u_{q_\nu}$$

die Beziehung

$$\sum_{\nu=1}^{j} h_{n_j q_\nu} u_{q_\nu} \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{für } j = q(q+1) \longrightarrow \infty \\ 1 & \text{für } j = q^2 \longrightarrow \infty . \end{cases}$$

Damit folgt aus (19) die Beziehung (18) und somit $\varepsilon \notin c_D$.

Insgesamt ist also Lemma 4.9 bewiesen.

Beweis von Satz 4.8:

Sei $i \in (1,2,3)$ fest gewählt, $x \in \mathcal{U}_i \cap c_B$ mit $\lim_A x \neq \lim_B x$ und seien A^* und B^* definiert wie in 4.6. Wir zeigen zunächst $x \in \mathcal{U}_i^* \cap c_B*$:

Da $m \cap c_A \subseteq |A| \cap c_A \subseteq F_A \subseteq I_A$ nach Satz 3.6 gilt, folgt die Existenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$; somit gilt $x \in c_A*$ und $x \in F_A* = B_A* \cap I_A* = B_A*$ laut Definition von A^*.

Insbesondere erhält man $x \in F_A*$ für $i = 3$, $x \in m \cap c_A*$ für $i = 1$ und wegen 3.4b

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| < \infty \text{ , d.h. } x \in |A^*| \cap c_A* \text{ für } i = 2.$$

Da A und B auf den konvergenten Folgen verträglich sind, gilt nach 1.11 $a_k = b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, woraus $x \in c_B*$ und $\lim_A* x \neq \lim_B* x$ folgt.

OBdA kann

(21) $\qquad \lim_A* x = 0 \quad \text{und} \quad \lim_B* x = 1$

angenommen werden, da sonst

$$x^0 := ((x_k - (\chi(A^*))^{-1} \lim_A* x) d^{-1})_{k \in \mathbb{N}} \quad \text{mit}$$

$$d := \lim_B*(x_k - (\chi(A^*))^{-1} \lim_A* x)_{k \in \mathbb{N}}$$

betrachtet werden kann.

Bemerkung: Es gilt $d \neq 0$ und $\chi(A^*) = \chi(A) \neq 0$

Die Verfahren $C = (c_{nk})_{n,k \in \mathbb{N}}$ bzw. $D = (d_{nk})_{n,k \in \mathbb{N}}$ seien definiert durch

(22) $\qquad c_{nk} := a^*_{nk} x_k \quad$ bzw. $\quad d_{nk} := b^*_{nk} x_k$ für alle $n,k \in \mathbb{N}$.

C und D erfüllen die Voraussetzungen von Lemma 4.9 , denn

$x \in \mathcal{A}_i^* \cap c_{B^*} \subseteq B_{A^*}$ impliziert (Zr),

(21) impliziert (Zs) mit c = 0 und d = 1 und

$a_k^* = b_k^* = 0$ hat (Sp_0) zur Folge.

Damit gibt es nach Lemma 4.9 eine Folge ε mit $\varepsilon \in c_C$ und $\varepsilon \notin c_D$; wählt man die im Beweis von 4.9 konstruierte Folge ε und setzt

(23) $\qquad y := (x_k \varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$,

so erhält man

(24) $\qquad y \in c_{A^*}$ und $y \notin c_{B^*}$.

Ist für die so definierte Folge y

(25) die Existenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \varepsilon_k$,

(26) $y \in \mathcal{A}_i^*$ und $y \in \mathcal{A}_i$ für das gewählte $i \in (1,2,3)$

gezeigt, so folgt aus (25)

(27) $\qquad y \in c_A$ und $y \notin c_B$, da

nach 1.11 und den Voraussetzungen des Satzes 4.8

$a_k = b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und somit die Existenz von

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k y_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x_k \varepsilon_k$$

folgt.

Es bleibt also (25) und (26) zu zeigen.

a) Da $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ existiert, gilt für $g_l := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$

insbesondere $\lim_{l\to\infty} g_l = 0$. Im Beweisteil b) von Lemma 4.9 wurde die Indexfolge $(q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ so konstruiert, daß

$$|g_l| < \alpha_j \text{ für alle } l\in\mathbb{N} \text{ mit } l \geq q_j$$

gilt. Ist u durch (14) definiert, so gilt

$$\sum_{l=1}^{\infty} |g_l u_l| = \sum_{j=1}^{\infty} |g_{q_j} u_{q_j}|$$

$$\leq \sup_{l\in\mathbb{N}} |u_l| \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j < \infty ,$$

woraus die Existenz von $\sum_{l=1}^{\infty} g_l u_l$ folgt.

Wie in cii) des Beweises von 4.9 zeigt man

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \varepsilon_k = \sum_{l=1}^{\infty} g_l u_l ,$$

womit (25) und damit $y\in c_A$ und $y\notin c_B$ gezeigt ist.

b) Es ist $y\in \mathcal{O}_i^*$ bzw. $y\in \mathcal{O}_i$ zu zeigen:

Nach Konstruktion gilt $\varepsilon\in m$ (vgl.(9) und (12)), d.h. $x\in m$ (i = 1) impliziert $y\in m$ und nach (24) $y\in m\cap c_A*$ bzw. nach a) $y\in m\cap c_A$; gilt $x\in|A|\cap c_A$ (i = 2), so ist $x\in|A^*|\cap c_A*$, $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k x_k| < \infty$ und $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}x_k| < \infty$, woraus wegen $\varepsilon\in m$ die Beziehung $y\in|A^*|\cap c_A*$ bzw. $y\in|A|\cap c_A$ folgt.

Für i = 3 bleibt wegen $y\in c_A$, $B_A* = F_A*$ und der Existenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \varepsilon_k$ nur noch $y\in B_A*$ zu zeigen.

Da C und D die Voraussetzungen von Lemma 4.9 erfüllen, gilt nach (15) mit den Bezeichnungen aus dem Beweis von 4.9

$$\begin{aligned} \Big| \sum_{k=1}^{r} a^*_{nk} y_k \Big| &= \Big| \sum_{k=1}^{r} a^*_{nk} x_k \varepsilon_k \Big| = \Big| \sum_{k=1}^{r} c_{nk} \varepsilon_k \Big| \\ &= \Big| \sum_{l=1}^{r} g_{nl} u_l - g_{n,r+1} \varepsilon_r \Big| \\ &\leq \sum_{l=1}^{\infty} |g_{nl} u_l| + |g_{n,r+1} \varepsilon_r| \\ &\leq M^* + M < \infty ; \end{aligned}$$

die letzte Abschätzung gilt, da $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{l=1}^{\infty} |g_{nl} u_l| < \infty$ aus di) des Beweises von 4.9 folgt und nach (1),(9) und (12) die Beziehung $|g_{n,r+1} \varepsilon_r| < M$ für alle $r,n \in \mathbb{N}$ gilt. Damit ist aber $y \in B_{A^*}$, d.h. $y \in \mathcal{O}_i$ für i = 3 gezeigt.
Insgesamt ist Satz 4.8 bewiesen.

Satz 4.7 und damit die Sätze 4.1, 4.4 und 4.5 wurden für koreguläre Matrixverfahren bewiesen. Daß die aufgezählten Sätze i.a. für konulläre Verfahren nicht gelten, wird durch die Beispiele 8.4 - 8.6 gezeigt werden. Im folgenden untersuchen wir, unter welchen Voraussetzungen die genannten Sätze für konulläre Verfahren gelten. E. Jurimäe formulierte in [11, Theorem] einen Satz, der Satz 4.1 für

konulläre Verfahren enthält, und erkannte damit, daß die Voraussetzung $\lim_A x = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} a_{nk}x_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ für alle $x \in m \cap c_A$ hinreichend für die Gültigkeit von Satz 4.1 für konulläre Verfahren ist; dieser Satz wurde von E. Jurimäe unter einer falschen Voraussetzung bewiesen(vgl.§5). Einen exakten Beweis gab S.C. Chang in [4, Theorem 3.7] (vgl. auch [6, Theorem 3]), wobei er Satz 4.2 zugrunde legte.

In [2, Satz 5.8] wurde weiter gezeigt, daß Satz 4.4 unter der Voraussetzung $\lim_A x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ für alle $x \in |A| \cap c_A$ für konulläre Matrixverfahren gilt.

Wir werden nun zeigen, daß die entsprechende Voraussetzung für die Gültigkeit von Satz 4.5 für konulläre Verfahren hinreichend ist; die Voraussetzung $\lim_A x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ für alle $x \in F_A$ ist wegen $F_A \subseteq I_A$ sinnvoll. In §5 werden wir sehen, daß die aufgeführten Voraussetzungen jeweils auch notwendig für die Gültigkeit der Sätze 4.1, 4.4 bzw. 4.5 für konulläre Verfahren sind.

Mit den Bezeichnungen in 4.6 fassen wir die drei angedeuteten Sätze für konulläre Verfahren in einen Satz zusammen. Ist $i \in (1,2,3)$ fest gewählt,

dann gilt:

4.10 Satz:

Seien A und B auf den konvergenten Folgen verträgliche Matrixverfahren, und A sei konullär (damit ist auch B konullär) und $\lim_A x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ für alle $x \in \mathcal{A}_i$, dann folgt aus $\mathcal{A}_i \subseteq c_B$ die Verträglichkeit von A und B auf $\mathcal{A}_i$.

Wir beweisen wieder den folgenden, hierzu äquivalenten Satz:

4.11 Satz:

Seien A und B auf den konvergenten Folgen verträgliche Matrixverfahren, sei A konullär und es gelte $\lim_A x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ für alle $x \in \mathcal{A}_i$; gibt es ein $x \in \mathcal{A}_i \cap c_B$ mit $\lim_A x \neq \lim_B x$, dann gibt es ein $y \in \mathcal{A}_i$ mit $y \notin c_B$.

Beweis:

Wir führen den Beweis auf den Beweis von Satz 4.8 zurück.

Sei $x \in \mathcal{A}_i \cap c_B$ (i fest) mit $\lim_A x \neq \lim_B x$ und seien A^* und B^* definiert wie in 4.6. Wie im Beweis von Satz 4.8 erhält man

$$x \in \mathcal{A}_i^* \cap c_{B^*} \text{ und } \lim_{A^*} x \neq \lim_{B^*} x.$$

Da laut Voraussetzung $\lim_A x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ gilt, erhält man $\lim_A *x = 0$ für das gewählte x. OBdA kann $\lim_B *x = 1$ gewählt werden, denn sonst kann $x^0 := (x_k(\lim_B *x)^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$ betrachtet werden.

Bemerkung: An dieser Stelle geht die Voraussetzung $\lim_A x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ für alle $x \in \mathcal{A}_i$ ein, da sonst wegen $\chi(A^*) = \chi(A) = 0$ x nicht so gewählt werden kann, daß $\lim_A *x = 0$ gilt(vgl.(21) im Beweis von Satz 4.8).

Der restliche Beweis verläuft wie der Beweis von Satz 4.8 ab der Definition der Verfahren C und D an der Stelle (22).

§5 Die Verträglichkeitseigenschaften 0, |0|, 0_F und die Perfektheitseigenschaften J, |J| und J_F

In den Betrachtungen dieses Paragraphen gehen wir von folgendem Satz aus(vgl.[29; 22,I,II] und Arbeiten von weiteren hier genannten Autoren):

5.1 Satz:

Seien A und B konvergenztreue Matrixverfahren. A ist genau dann mit allen Verfahren B mit $c_A \subseteq c_B$ und $\lim_A x = \lim_B x$ auf c verträglich auf c_A, wenn A perfekt ist, d.h. wenn $\overline{c} \supseteq c_A$ bzgl. der FK-Topologie von c_A gilt.

Beweis:

"$\Longrightarrow$": Nach 2.15 ist zu zeigen, daß für alle $f \in c_A'$ mit $f(x) = 0$ für alle $x \in c$ auch $f(x) = 0$ für alle $x \in c_A$ gilt.
Sei $f \in c_A'$ mit $f(x) = 0$ auf c; betrachtet man $(g := f - \lim_A) \in c_A'$, so gibt es nach [26, Satz 5.3a] ein Verfahren B mit $c_A \subseteq c_B$ und $\lim_B x = g(x)$ für alle $x \in c_A$. Wegen $f(x) = 0$ auf c und den gemachten Voraussetzungen folgt $g(x) = \lim_B x = \lim_A x$ für alle $x \in c_A$, was $f(x) = 0$ auf c_A impliziert.

"$\Longleftarrow$": Diese Richtung folgt unmittelbar, da $\lim_B \in c_A'$ gilt(vgl. 2.8).

Wir werden untersuchen, inwieweit Satz 5.1 richtig bleibt, wenn man von den Sätzen 4.7 und 4.10 ausgeht, d.h. in 5.1 statt der Verträglichkeit bzw. der Perfektheit auf c_A die Verträglichkeit bzw. die Perfektheit auf den Mengen $m \cap c_A$, $|A| \cap c_A$ und F_A betrachtet. Dazu definieren wir zunächst die Verträglichkeitseigenschaften 0, $|0|$, 0_F und die Perfektheitseigenschaften J, $|J|$ und J_F. Um nicht mehrmals den beinahe gleichen Wortlaut wiederholen zu müssen, fassen wir jeweils die Definitionen von 0, $|0|$, 0_F und J, $|J|$ und J_F in die folgenden zwei Definitionen zusammen.

5.2 Definition:

A besitzt die Eigenschaft 0 bzw. $|0|$ bzw. 0_F (kurz $A \in 0,\ldots$), wenn für jedes Matrixverfahren B mit $m \cap c_A \subseteq c_B$ bzw. $|A| \cap c_A \subseteq c_B$ bzw. $F_A \subseteq c_B$ aus der Verträglichkeit von A und B auf den konvergenten Folgen c die Verträglichkeit auf $m \cap c_A$ bzw. auf $|A| \cap c_A$ bzw. auf F_A folgt.

5.3 Definition:

A erfüllt die Eigenschaft J bzw. $|J|$ bzw. J_F (kurz $A \in J,\ldots$), wenn die konvergenten Folgen c bzgl. der FK-Topologie von c_A in $m \cap c_A$ bzw. in $|A| \cap c_A$ bzw. in F_A dicht liegen, d.h. wenn $\overline{c} \supseteq m \cap c_A$ bzw. $\overline{c} \supseteq |A| \cap c_A$ bzw. $\overline{c} \supseteq F_A$ gilt.

5.4 Bemerkung:

Aus der Definition 5.3 folgt unmittelbar $J_F \subseteq |J| \subseteq J$.

Die Eigenschaft O wurde von E. Jurimäe in [11,§4] eingeführt, jedoch mit der Annahme, daß die Eigenschaften $\dot{O}$ und J äquivalent sind, d.h. daß der entsprechend abgeänderte Satz 5.1 gilt. In [4, Theorem 3.3] (vgl. auch [6, Theorem 1]) wurde von S.C. Chang gezeigt, daß ein konulläres Matrixverfahren A mit $A \in J \setminus O$ existiert(vgl. 8.4). Weiter bewies S.C. Chang in [4, §3], daß alle koregulären Verfahren die Eigenschaften O und J besitzen. Für konulläre Verfahren wurde in [4, §4] bewiesen, daß $\lim_A x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ für alle $x \in m \cap c_A$ notwendig und hinreichend für die Eigenschaft O und die Voraussetzungen O-multiplikativ, "maximal inset" und ersetzbar jeweils hinreichend für die Äquivalenz der Eigenschaften O und J sind.

In [2, §§6 und 7] wurde das Entsprechende für die Eigenschaften |O| und die Äquivalenz von |O| und |J| gezeigt, jedoch, da keine Aussage über die Invarianz von $|A| \cap c_A$ gemacht werden konnte, mit der Einschränkung, daß für ersetzbare konulläre Verfahren die Äquivalenz von |O| und |J| nicht bewiesen werden konnte.

Nach den Ausführungen in §4 können wir zeigen, daß

alle koregulären Verfahren die Eigenschaften O_F und J_F besitzen. Weiter können wir entsprechend zu den Aussagen von S.C. Chang zeigen, daß die Bedingung

$\lim_A x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ für alle $x \in F_A$ für die Eigenschaft O_F hinreichend und notwendig ist und die Voraussetzungen O-multiplikativ, "maximal inset" und ersetzbar(vgl. §6) jeweils hinreichend für die Äquivalenz der Eigenschaften O_F und J_F sind. Weiter wird gezeigt, wie es auch in [4] und [2] für die entsprechenden Eigenschaften geschehen ist, daß bei konullären Verfahren die Eigenschaft O_F die Eigenschaft J_F impliziert.

Daß man bei den entsprechenden Eigenschaften parallele Ergebnisse erhält, liegt an der Parallelität der Ergebnisse in 4.8 bzw. 4.10 und der Darstellung der stetigen linearen Funktionale auf $F_A \supseteq |A| \cap c_A \supseteq m \cap c_A$ (vgl. Satz 3.7).

Wir betrachten zunächst koreguläre Verfahren.

5.5 Satz:

Alle koregulären Matrixverfahren besitzen die Eigenschaften

a) O, $|O|$, O_F und

b) J, $|J|$ und J_F.

5.6 Bemerkung:

i) Analog zu 5.1 "$\Longrightarrow$" kann für konvergenztreue Verfahren "$0 \Longrightarrow J$", "$|0| \Longrightarrow |J|$" und "$0_F \Longrightarrow J_F$" gezeigt werden, da $c_A \subseteq c_B$ die Relationen $m \cap c_A \subseteq c_B$, $|A| \cap c_A \subseteq c_B$ und $F_A \subseteq c_B$ zur Folge hat.

ii) M.R. Parameswaran bewies in [14], daß aus $\chi(A) \neq 0$ die Eigenschaft J folgt.

Beweis von 5.5:

Vgl. [4, S.30] und [2, Satz 6.6].

a) folgt unmittelbar aus Satz 4.7.

b) Nach Lemma 2.15 und Bemerkung 5.4 genügt es zu zeigen, daß für alle $f \in c_A'$ mit $f(x) = 0$ auf c auch $f(x) = 0$ auf F_A gilt.

Nach Satz 3.7 kann $f \in c_A'$ mit einem geeigneten $\alpha \in \mathbb{C}$ durch

$$(1) \quad f(x) = \alpha(\lim_A x - \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k) + \sum_{k=1}^{\infty} f(e^k) x_k$$

auf F_A dargestellt werden.

Da $e^k \in c$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $e \in c$ gilt, erhält man

$$0 = f(e) = \alpha(\lim_A e - \sum_{k=1}^{\infty} a_k) = \alpha\, \chi(A)$$

und wegen $\chi(A) \neq 0$ schließlich $\alpha = 0$. Daraus folgt nach (1) $f(x) = 0$ auf F_A, d.h. die Behauptung.

Im folgenden betrachten wir nur konulläre Verfahren. Zunächst werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Eigenschaft O_F gegeben; wegen der Parallelität werden die entsprechenden Ergebnisse für das beschränkte und absolut-A-beschränkte Wirkfeld angegeben.

5.7 Satz:

Sei A ein konulläres Matrixverfahren.

a) Folgende Aussagen sind äquivalent:

i) A besitzt die Eigenschaft 0 (bzw. $|0|$),

ii) $\lim_A x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ für alle $x \in m \cap c_A$ (bzw. $x \in |A| \cap c_A$),

iii) $W_A \supseteq m \cap c_A$ (bzw. $W_A \supseteq |A| \cap c_A$).

b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

i) A besitzt die Eigenschaft O_F,

ii) $\lim_A x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ für alle $x \in F_A$,

iii) $W_A = F_A$.

Beweis:

a) Vgl. [4, Theorem 3.7] bzw. [2, Satz 6.7].

b) Dem Beweis liegt dieselbe Beweisidee wie dem Beweis von a) zugrunde.

"i⇒ii": Definiert man $B = (b_{nk})_{n,k \in \mathbb{N}}$ durch $b_{nk} = a_k$ für $k \leq n$ und $b_{nk} = 0$ sonst, so erfüllt B nach

Lemma 3.3 $c_B = B_B = I_B = F_B \supseteq I_A \supseteq F_A$; da nach 1.3(1) $\lim_B x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k = \lim_A x$ für alle $x \in c$ gilt, folgt aus $A \in O_F$ die Aussage ii).

"ii $\Rightarrow$ i": Satz 4.10 für i = 3.

"ii $\Rightarrow$ iii": Für alle $f \in c_A'$ gibt es nach Satz 3.7 ein $\alpha \in \mathbb{C}$ derart, daß

$$f(x) = \alpha(\lim_A x - \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k) + \sum_{k=1}^{\infty} f(e^k) x_k$$

für alle $x \in F_A$ gilt. Daraus folgt mit ii)

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f(e^k) x_k$$

für alle $x \in F_A$, was laut Definition(vgl.3.1) $F_A \subseteq W_A$ impliziert.

"iii $\Rightarrow$ ii": Dies folgt, wenn man die Definition von W_A auf $\lim_A \in c_A'$ anwendet.

5.8 Folgerung:

Für konullare Matrixverfahren gilt:

a) Aus der Eigenschaft 0 folgt die Eigenschaft $J(0 \subseteq J)$;

b) aus der Eigenschaft $|0|$ folgt die Eigenschaft $|J|$ $(|0| \subseteq |J|)$;

c) aus der Eigenschaft 0_F folgt die Eigenschaft J_F;

d) $0_F \subseteq |0| \subseteq 0$;

e) $J \setminus 0 \subseteq |J| \setminus |0| \subseteq J_F \setminus 0_F$.

Beweis:

a) - c): Die Aussagen a) und c) sind in der Bemerkung 5.6i enthalten.

Definiert man $\mathcal{A}_i$ für i = 1,2,3 wie in 4.6, so ist nach 2.15 zu zeigen, daß für alle $f \in c_A^!$ mit f(x) = 0 auf c auch f(x) = 0 für alle $x \in \mathcal{A}_i$ für ein fest gewähltes $i \in (1,2,3)$ gilt.

Dies erhält man, wenn man $f \in c_A^!$ durch Satz 3.7 auf F_A darstellt und 5.7aii bzw. 5.7bii berücksichtigt.

d) $0_F \subseteq |0| \subseteq 0$ folgt aus $m \cap c_A \subseteq |A| \cap c_A \subseteq F_A$ und 5.7aii bzw. 5.7bii.

e) Sei $A \in J \setminus 0$ und $f \in c_A^!$ mit f(x) = 0 auf c; nach Satz 3.7 hat f auf F_A mit einem geeignet gewählten $\alpha \in \mathbb{C}$ die Darstellung

$$f(x) = \alpha(\lim_A x - \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k) + \sum_{k=1}^{\infty} f(e^k) x_k$$

$$(*) \qquad = \alpha(\lim_A x - \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k).$$

Letzteres ist richtig, da $e^k \in c$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Wegen $A \not\subseteq 0$ und Satz 5.8a existiert ein $x^0 \in m \cap c_A$ mit $\lim_A x^0 \neq \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k^0$; da $A \in J$ und damit f(x) = 0 auf $m \cap c_A$ gilt(vgl.2.15), erhält man $\alpha = 0$ aus (*), woraus f(x) = 0 auf F_A folgt. Damit gilt $A \in J_F \subseteq |J|$ und nach d) wegen $A \not\subseteq 0$ auch $A \not\subseteq |0|$.

Der Beweis von $|J| \setminus |0| \subseteq J_F \setminus 0_F$ verläuft analog.

Die Umkehrungen von 5.8a)-c) gelten i.a. nicht(vgl. 8.4-8.6). Setzt man jedoch voraus, daß das konuläre Matrixverfahren A die Eigenschaft O-multiplikativ oder "maximal inset" besitzt, so gilt die Umkehrung von 5.8a)-c).

5.9 Satz:

Sei A ein konuläres Matrixverfahren, dann sind die Bedingungen

i) A hat "maximal inset"(Def. vgl. 3.2) und

ii) A ist O-multiplikativ(Def.vgl. 1.5)

jeweils hinreichend für die Äquivalenz der Eigenschaften

a) O und J,

b) $|O|$ und $|J|$,

c) O_F und J_F.

Beweis:

a) S.C. Chang [4, Theorem 3.5 und 3.10]

b) [2, Satz 6.13b]

c) Da jedes O-multiplikative Verfahren "maximal inset" besitzt und 5.8c gilt, genügt es zu zeigen, daß für konuläre Matrixverfahren mit "maximal inset" aus der Eigenschaft J_F die Eigenschaft O_F bzw. nach Satz 5.7b $\lim_A x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ für alle $x \in F_A$ folgt.

Das Letztere gilt aber, da $(\lim_A x - \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k) \in c_A'$ und

$f(x) = 0$ für alle $x \in c$ nach 1.3(1) gilt;
$\lim_A = (\lim \circ A)$ ist als Hintereinanderausführung von stetigen Abbildungen stetig und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ ist nach [26, Satz 4.4b] auf jedem FK-Raum auf welchem die Reihe existiert stetig und linear, also insbesondere auf c_A.

Wie schon angedeutet wurde, gilt Satz 5.9 auch für ersetzbare konulläre Matrixverfahren; um dies beweisen zu können, untersuchen wir im nächsten Paragraphen zunächst die Eigenschaften J, J_F, 0 und 0_F bzgl. der "Invarianz".

§6 Invarianz der Eigenschaften O, O_F, J und J_F und Ersetzbarkeit konullärer Matrixverfahren

6.1 Definition:

Eine Eigenschaft T eines Matrixverfahrens A heißt invariant, wenn es eine Eigenschaft ist, die vom Wirkfeld und nicht von der speziellen Art der Matrix A abhängt; wenn zum Beispiel A und B die Bedingung $c_A = c_B$ erfüllen, so haben entweder A und B oder keine der beiden Matrixverfahren die Eigenschaft T.

6.2 Beispiele:

Invariant sind:

a) Die FK-Topologie des Wirkfelds eines Matrixverfahrens,

b) die Eigenschaften koregulär und konullär,

c) das beschränkte Wirkfeld $m \cap c_A$ und

d) die Mengen S_A, W_A, F_A und L_A.

Beweis:

c) und d): Die Invarianz von $m \cap c_A$, S_A, W_A und F_A folgt unmittelbar aus den Definitionen. J.J. Sember bewies in [17] die Invarianz von L_A.

a) folgt unmittelbar aus der Bemerkung 2.8.

b) Sei $c_A = c_B$, so erhält man die Invarianz der Eigenschaften koregulär bzw. konullär, indem man $\chi(A)$ bzw.

$\chi(B)$ mittels der Darstellung von $\lim_A \in c_B'$ bzw. $\lim_B \in c_A'$ auf $F_A = F_B$ nach Satz 3.7 berechnet.

In [4, Lemma 3.9] zeigte S.C. Chang die Invarianz der Eigenschaften 0 und J; mit demselben Beweisgedanken läßt sich zeigen, daß auch die Eigenschaften 0_F und J_F invariant sind. Für die Eigenschaften $|0|$ und $|J|$können wir diese Aussage nicht machen, da bis jetzt unbekannt ist, ob das absolut-A-beschränkte Wirkfeld $|A| \cap c_A$ invariant ist.

6.3 Satz:

Invariante Eigenschaften sind

a) J und J_F,

b) 0 und 0_F.

Beweis:

a) $m \cap c_A$, F_A und die FK-Topologie von c_A sind invariant(vgl. 6.2).

b) Die Invarianz von 0 wurde in [4, Lemma 3.9] gezeigt. Da jedes koreguläre Matrixverfahren die Eigenschaft 0_F besitzt und die Eigenschaft koregulär invariant ist, ist 0_F invariant bzgl. koregulärer Matrixverfahren.

Seien A und B konulläre Matrixverfahren mit $c_A = c_B$ und $A \in 0_F$. Da $\lim_B \in c_B' = c_A'$ und $F_A = F_B$ gilt, kann $\lim_B$ nach Satz 3.7 mit einem geeigneten $\alpha \in \mathbb{C}$ durch

$$\lim_B x = \alpha(\lim_A x - \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k) + \sum_{k=1}^{\infty} x_k \lim_B e^k$$

für alle $x \in F_B = F_A$ dargestellt werden; hieraus erhält man nach Satz 5.7b und wegen $A \notin 0_F$

$$\lim_B x = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x_k \quad \text{für alle } x \in F_B.$$

Nach Satz 5.7b ist dies gleichbedeutend mit $B \in 0_F$, was die Invarianz von 0_F bzgl. konullärer Verfahren zur Folge hat. Da die Eigenschaften koregulär und konullär invariant sind, ist damit die Eigenschaft 0_F invariant.

Mit Satz 6.3 können wir nun zeigen, daß für ersetzbare konulläre Matrixverfahren die Eigenschaften 0_F und J_F äquivalent sind.

6.4 Satz:

Die Ersetzbarkeit ist bei konullären Matrixverfahren hinreichend für die Äquivalenz von

a) 0 und J,

b) 0_F und J_F.

Beweis:

a) [4, Theorem 3.10]

b) Sei A ersetzbar und konullär; wegen 5.8c genügt es zu zeigen, daß aus der Eigenschaft J_F die Eigenschaft 0_F folgt.

Sei also $A \in J_F$, ersetzbar und konullär, dann gibt es ein 0-multiplikatives Matrixverfahren B mit $c_A = c_B$, welches wegen der Invarianz von J_F (vgl. 6.3) die

Eigenschaft J_F besitzt. Da nach 5.9 für 0-multiplikative Verfahren 0_F und J_F äquivalent sind, besitzt B die Eigenschaft 0_F und wegen der Invarianz von 0_F(vgl. 6.3) gilt $A \in 0_F$.

6.5 Folgerung:

Sei A konullär, dann folgt aus $A \in J_F \setminus 0_F \supseteq |J| \setminus |0|$, daß A nicht ersetzbar ist. Für $A \in J \setminus 0 \subseteq |J| \setminus |0|$ wurde dies von S.C. Chang in [4, Theorem 3.10] gezeigt.

6.6 Folgerung:

Die Ersetzbarkeit ist bei konullären Matrixverfahren hinreichend für die Äquivalenz der Eigenschaften $|0|$ und $|J|$.

Beweis:

Nach 5.8b ist nur zu zeigen, daß die Eigenschaft $|J|$ die Eigenschaft $|0|$ impliziert! Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es ein ersetzbares konulläres Matrixverfahren mit $A \in |J| \setminus |0|$, was im Widerspruch zu der Aussage in 6.5 steht.

Im folgenden Teil des Paragraphen werden wir ersetzbare konulläre Matrixverfahren charakterisieren. Dabei gehen wir von folgendem Satz aus, den A. Wilansky in [24, Satz 9.1] bewiesen hat.

6.7 Satz:

Sei A ein konvergenztreues Matrixverfahren und P_A wie in 3.1 definiert. Ist c_0 nicht dicht in P_A bzgl. der FK-Topologie von c_A, so ist A ersetzbar.

Beweis: [24, Satz 9.1]

Die Umkehrung von Satz 6.7 ist gültig für koreguläre Verfahren, jedoch i.a. falsch für konulläre Verfahren(vgl. Beispiel 8.4).

Die Konstruktion im Beweis von Satz 6.7 weist auf folgende Charakterisierung der ersetzbaren Verfahren hin.

6.8 Satz:

Ein konvergenztreues Matrixverfahren A ist genau dann ersetzbar, wenn es ein $f \in c_A'$ mit $f(x) = 0$ für alle $x \in c_0$ und eine Darstellung von f (vgl.2.14c) mit $\alpha \neq 0$ gibt.

Beweis:

"$\Longrightarrow$": Sei B eine zu A gehörige t-multiplikative Matrix mit $c_B = c_A$, dann erfüllt $f := \alpha \cdot \lim_B \in c_A'$ mit $\alpha \neq 0$ die geforderten Eigenschaften.

"$\Longleftarrow$": Ist $f \in c_A'$ mit $\alpha \neq 0$ und $f(x) = 0$ auf c_0, so kann nach K. Zeller in [26, Satz 5.3b] eine Matrix B mit $c_A = c_B$ und $f(x) = \lim_B x$ auf c_A konstruiert werden. Nach Lemma 1.6 ist B t-multiplikativ.

6.9 Folgerung:

Alle konvergenztreuen Matrixverfahren A mit "maximal inset" sind ersetzbar; definiert man $B = (b_{nk})_{n,k\in\mathbb{N}}$ durch

$$b_{nk} := \begin{cases} -a_k & \text{für } k \geq 1 \text{ und } n = 1 \\ -a_k + a_{n-1,k} & \text{für } k \geq 1 \text{ und } n > 1 \end{cases},$$

so gilt $c_A = c_B$ und B ist $\chi(A)$-multiplikativ.

Beweis:

In Satz 6.8 setzt man $f(x) := \lim_A x - \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ für alle $x \in c_A$; $f \in c_A'$, da $\lim_A \in c_A'$ und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ in jedem FK-Raum, in welchem sie existiert, stetig und linear ist(vgl.[26, Satz 4.4b]). $f(x) = 0$ für alle $x \in c_0$ folgt unmittelbar aus 1.3(1).

Das Verfahren B erhält man aus der Konstruktion von K. Zeller in [26, Satz 5.3b]. Man verifiziert leicht, daß $c_A \subseteq c_B$ gilt; die erste Zeile der Matrix B bewirkt $c_A = c_B$. B ist $\chi(A)$-multiplikativ, da laut Definition von B und nach 1.3(1)

$$\begin{aligned} \lim_B x &= \chi(B) \lim_{k\to\infty} x_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k x_k \\ &= \chi(B) \lim_{k\to\infty} x_k = \chi(A) \lim_{k\to\infty} x_k \end{aligned}$$

für alle $x \in c$ gilt.

Mit der Folgerung 6.9 ist die Frage V von A. Wilansky in [24, S.348] vollständig beantwortet.

Satz 6.8 läßt noch eine weitere Charakterisierung von ersetzbaren konullären Verfahren zu; das Ergebnis von S.C. Chang in [4, Satz 3.11], daß Verfahren A mit $A \notin J$ ersetzbar sind, ist darin enthalten.

6.10 Folgerung:

Sei A konvergenztreu und $A \notin J_F$ (nach Satz 5.5 ist A konullär), dann ist A ersetzbar; wegen $J_F \subseteq |J| \subseteq J$ gilt diese Aussage insbesondere für $A \notin |J|$ (vgl. [2, Satz 7.6]) bzw. für $A \notin J$ (vgl. [4, Satz 3.11]).

Beweis:

6.10 folgt natürlich aus 6.7; der Beweis soll jedoch durchgeführt werden, da sich die Beweisführung mit dem Beweisgedanken von 6.7 wegen $A \notin J_F$, d.h. $\overline{c} \neq F_A$ wesentlich vereinfacht.

Nach Satz 6.8 ist zu zeigen, daß ein $f \in c_A'$ mit $f(x) = 0$ auf c_0 und eine Darstellung von f (vgl. 2.14c) mit $\alpha \neq 0$ existiert. Da $A \notin J_F$ laut Definition genau dann gilt, wenn $\overline{c} \neq F_A$ gilt, gibt es ein $x^0 \in F_A$ mit $x^0 \notin \overline{c}$ und nach dem Fortsetzungssatz von Hahn-Banach ein $f \in c_A'$ mit $f(x) = 0$ auf c und $f(x^0) = 1$.

Nach Satz 3.7 gibt es ein $\alpha \in \mathbb{C}$ derart, daß

$$f(x) = \alpha(\lim\nolimits_A x - \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k) + \sum_{k=1}^{\infty} f(e^k) x_k$$

für alle $x \in F_A$ gilt. Da $e^k \in c$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $x^o \in F_A$ gilt, erhält man

$$1 = f(x^o) = \alpha(\lim_A x - \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k) ,$$

woraus $\alpha \neq 0$ folgt.

Insgesamt wurde also bewiesen, daß konulläre Verfahren ersetzbar sind, falls sie nicht die Eigenschaft J_F oder falls sie "maximal inset" besitzen, während konulläre Verfahren nicht ersetzbar sind, wenn sie die Eigenschaft J_F aber nicht die Eigenschaft O_F erfüllen. In §8 werden wir zeigen, daß es sowohl "maximal inset" Verfahren mit der Eigenschaft O_F als auch "maximal inset" Verfahren A mit $A \notin J_F$ gibt. Weiter werden wir in §8 zeigen, daß §6 eine echte Erweiterung der Ergebnisse in [4, §3] ist, d.h. daß durch §6 mehr konulläre ersetzbare Verfahren charakterisiert werden.

Offen bleibt die Frage nach der Ersetzbarkeit von konullären Matrixverfahren, welche die Eigenschaft O_F aber nicht die Eigenschaft "maximal inset" besitzen.

Allgemein kann für die Ersetzbarkeit von konvergenztreuen Verfahren folgende notwendige Bedingung gegeben werden, die zum Nachweis der Nicht-Ersetzbarkeit von Beispiel 8.9 verwendet wird.

6.11 Satz:

Sei A ein ersetzbares konvergenztreues Matrixverfahren, dann gilt $L_A = F_A$.

Beweis:

Ist A ersetzbar, so gibt es ein t-multiplikatives Matrixverfahren B mit $c_A = c_B$. Nach Lemma 1.6 gilt $I_B = c_B$, woraus mit Lemma 3.3b $F_B = L_B \cap I_B = L_B$ folgt. Wegen der Invarianz von L_B und F_B (vgl.6.2d) erhält man

$$F_A = F_B = L_B = L_A$$

und damit die Behauptung.

Bevor wir in §8 Beispiele betrachten werden, wenden wir die Tatsache, daß konulläre Verfahren A mit $A \in J_F \setminus O_F$ nicht ersetzbar sind, auf die Frage nach der Abgeschlossenheit von L_A falls F_A abgeschlossen ist an.

§7 Abgeschlossenheit von L_A bzgl. der FK-Topologie von c_A

In der Arbeit [24] von A. Wilansky blieb für konulläre Matrixverfahren die Frage offen, ob die Abgeschlossenheit von F_A die Abgeschlossenheit von L_A impliziert. Für koreguläre Verfahren wurde dies in [24, 6.4] gezeigt; für konulläre Verfahren kann man unter der Voraussetzung der Abgeschlossenheit von F_A sogar $F_A = L_A$ zeigen.
Um den angedeuteten Satz beweisen zu können, benötigen wir folgende zwei Lemmata, die auf A. Wilansky in [24] zurückgehen.

7.1 Lemma:

Ist A ein konvergenztreues Matrixverfahren und c_0 nicht dicht in L_A bzgl. der FK-Topologie von c_A, so gilt $L_A = F_A \neq W_A$.

Beweis([24, Lemma 5.5]):

Laut Voraussetzung und nach Satz 2.15 gibt es ein $x^0 \in L_A$ und ein $f \in c_A'$ mit $f(x) = 0$ für alle $x \in c_0$ und $f(x^0) \neq 0$. f kann nach Satz 2.14c mit geeignetem $\alpha \in \mathbb{C}$, $t \in l$ und $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \in s$ dargestellt werden durch

$$f(x) = \alpha \cdot \lim_A x + t(Ax) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k \text{ für alle } x \in c_A.$$

Berechnet man α_k für alle $k \in \mathbb{N}$ durch $e^k \in c_0$, so erhält

man wegen $t(Ax) = (tA)x$ für alle $x \in L_A$ (vgl. 3.5)

$f(x) = \alpha(\lim_A x - \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k)$ für alle $x \in L_A$, woraus

$L_A \subseteq I_A$ und damit nach Lemma 3.3 $F_A = L_A$ folgt.

Da $f(x^0) \neq 0 = \sum_{k=1}^{\infty} f(e^k) x_k^0$ gilt, erhält man laut

Definition $L_A = F_A \neq W_A$.

7.2 Lemma:

Ist A konullär und F_A abgeschlossen, dann gilt

$S_A = W_A = \overline{c}_0$.

Beweis: [24, Satz 5.7]

Da insbesondere $\overline{c}_0 \subseteq F_A \subseteq L_A = B_A$ und $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e^k \right)_{n \in \mathbb{N}}$

für alle $x \in B_A$ beschränkt ist, ist $(e^k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Schauderbasis der linearen abgeschlossenen Hülle von $(e^k)_{k \in \mathbb{N}}$. Damit erhält man $S_A = \overline{c}_0 \subseteq W_A \subseteq \overline{c}_0$.

7.3 Satz:

Ist A ein konvergenztreues Verfahren, dann folgt aus der Abgeschlossenheit von F_A die Abgeschlossenheit von L_A; im Einzelnen gelten folgende Aussagen:

Ist F_A abgesclossen und

a) A koregulär, so gilt $F_A = L_A = P_A$;

b) A konullär und $A \in O_F$, dann gilt $L_A = F_A = W_A = S_A$ und $\overline{c}_0 = S_A$.

c) A konullär und $A \notin J_F$, dann gilt $L_A = F_A \neq W_A$.
d) Ist A konullär und gilt $A \in J_F \setminus 0_F$, dann ist F_A nicht abgeschlossen.

Beweis:

a) [24, Korollar 6.4].

b) Nach Satz 5.7b erhält man $F_A = W_A$, woraus nach Lemma 7.1 die Beziehung $\bar{c}_0 \supseteq L_A \supseteq F_A = W_A \supseteq \bar{c}_0$ folgt. Der restliche Teil der Aussage folgt aus 7.2.

c) Ist $A \notin J_F$, so ist insbesondere $\bar{c}_0 \not\supseteq L_A$, woraus nach Lemma 7.1 die Behauptung $L_A = F_A \neq W_A$ folgt.

d) Angenommen, A sei konullär mit $A \in J_F \setminus 0_F$ und F_A sei abgeschlossen, dann gilt nach Lemma 7.2 und Satz 5.7b die Beziehung $P_A \supseteq L_A \supseteq F_A \supsetneq W_A = S_A = \bar{c}_0$. Aus Satz 6.7 folgt damit die Ersetzbarkeit von A, woraus mit Folgerung 6.5 ein Widerspruch zu $A \in J_F \setminus 0_F$ folgt.

§8 Beispiele

Zunächst stellen wir in einem Satz zusammen, wie sich die Eigenschaften 0, $|0|$, 0_F, J, $|J|$ und J_F bzgl. der Enthaltenseinsrelation verhalten. Die in Klammer angeführten Beispiele belegen die Echtheit der Enthaltenseinsrelation. Wir betrachten im folgenden nur konulläre Matrixverfahren.

8.1 Satz:

a) $0_F \subsetneq |0| \subsetneq 0 \subsetneq J$ (vgl. 8.6, 8.5, 8.3 und 8.4);

b) $|0| \subsetneq |J| \subsetneq J$ (vgl. 8.5 und 8.3);

c) $0_F \subsetneq J_F \subsetneq |J| \subsetneq J$ (vgl. 8.6, 8.7 und 8.3);

d) $J \setminus 0 \subsetneq |J| \setminus |0| \subsetneq J_F \setminus 0_F$ (vgl. 8.5 und 8.6);

e) $J \setminus |J| \subsetneq 0 \setminus |0|$ und $|J| \setminus J_F \subsetneq |0| \setminus 0_F$ (vgl. 8.5 und 8.6).

Beweis:

a) Folgerung 5.8a) und d);

b) Folgerung 5.8b und Bemerkung 5.4;

c) Folgerung 5.8c und Bemerkung 5.4;

d) Folgerung 5.8e;

e) Da wegen $A \notin |J|$ bzw. $A \notin J_F$ die Ersetzbarkeit von A folgt, gilt nach Satz 6.4 bzw. Folgerung 6.6 $A \in 0$ bzw. $A \in |0|$.

Zunächst betrachten wir ein Beispiel eines 0-multi-

plikativen Verfahrens, das nicht die Eigenschaft J und damit keine der betrachteten Eigenschaften besitzt.

8.2 Beispiel(vgl.[11, §4]):

Das Matrixverfahren $A = (a_{nk})_{n,k\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch

$$a_{nk} := \begin{cases} (-1)^k & \text{für } k = n-1 \text{ und } k = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

A ist 0-multiplikativ und besitzt nicht die Eigenschaft J.

Beweis:

A ist 0-multiplikativ, da laut Konstruktion von A $\chi(A) = 0$ und $a_k = 0$ für alle $k\in\mathbb{N}$ gilt(vgl.1.6). Da $x^0 = ((-1)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ wegen $\lim_A x^0 = 2$ und $\lim_A x = 0$ auf c kein Berührpunkt der konvergenten Folgen ist, besitzt A nicht die Eigenschaft J.

8.3 Beispiel([2, 6.12]):

Sei $B = (b_{nk})_{n,k\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$b_{nk} := \begin{cases} 1/n & \text{für } k = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} ,$$

dann hat B folgende Eigenschaften:

i) B ist 0-multiplikativ und damit konullär;

ii) $B\in 0$ und damit $B\in J$;

iii) $B\notin |J|$ und damit $B\notin |0|$.

Beweis:

i) gilt nach Konstruktion von B.

ii) $B \in 0$ folgt aus Satz 5.7 ii, da $\lim_B x = \lim_{n\to\infty} x_n/n = 0$ für alle $x \in m \cap c_B = m$ gilt.

iii) Es gilt $B \notin |J|$, da $\lim_B x = 0$ für $x \in m \cap c_B = m$ und $\lim_B x^0 = 1$ für $x^0 = (k)_{k\in\mathbb{N}} \in |B| \cap c_B$ gilt und damit x^0 kein Berührpunkt der konvergenten Folgen c ist.

8.4 Beispiel(vgl.[4, 3.3]):

Sei $p_k = 2^{-k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und das Matrixverfahren $P = (p_{nk})_{n,k\in\mathbb{N}}$ gegeben durch

$$P := \begin{bmatrix}
p_1 & & & & & & & & \\
1 & -1 & & & & & & & \\
1 & -1 & p_3 & & & & & & \\
1 & -1 & p_3 & p_4 & & & & & \\
p_1 & p_2 & p_3 & 1 & -1 & & & & \\
p_1 & p_2 & p_3 & 1 & -1 & p_6 & & & \\
p_1 & p_2 & p_3 & 1 & -1 & p_6 & p_7 & & \\
p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & 1 & -1 & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{bmatrix}$$

P hat folgende Eigenschaften:

i) P ist konullär;

ii) $P \in J \setminus 0$ und es gilt $\overline{c}_0 = \overline{c} = c_P$;

iii) P ist nicht ersetzbar (vgl. Folgerung 6.5).

Beweis: [4, Theorem 3.3] bzw. [6, Theorem 1].

Das nächste Beispiel ist eine Vereinfachung von [2, Satz 7.10] und ist ein Matrixverfahren, das die Eigenschaft $|J|$ aber nicht die Eigenschaft $|0|$ besitzt.

8.5 Beispiel:

Sei $q_k = 2^{-k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und das Matrixverfahren $Q = (q_{nk})_{n,k \in \mathbb{N}}$ definiert durch

$$Q := \begin{bmatrix}
q_1 & & & & & & & & & \\
q_1 & 1/2^0 & & & & & & & & \\
q_1 & 1/2^0 & q_3 & & & & & & & \\
q_1 & 1/2^0 & q_3 & q_4 & & & & & & \\
q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & 1/2^1 & & & & & \\
q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & 1/2^1 & q_6 & & & & \\
q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & 1/2^1 & q_6 & q_7 & & & \\
q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 & q_7 & 1/2^2 & & \\
q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 & q_7 & 1/2^2 & q_9 & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{bmatrix}$$

Q besitzt folgende Eigenschaften:

i) Q ist konullär;

ii) $Q \in J_F$ und $Q \in |J| \setminus |0|$; Q ist sogar perfekt;

iii) $Q \in 0$ und damit $Q \in J$

iv) Q ist nicht ersetzbar(vgl. Folgerung 6.5)

Beweis:

i) gilt nach Konstruktion.

iii) Für alle $x \in m \cap c_Q = m$ gilt

$$\lim_Q x = \sum_{k=1}^{\infty} q_k x_k + \lim_{r\to\infty} 2^{-r} x_{3r+2}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} q_k x_k ,$$

woraus $Q \in 0 \subseteq J$ nach Satz 5.7aii folgt.

ii) a) Zunächst wird $Q \notin |0|$ gezeigt.

Für $x^0 = (0, 2^0, 0, 0, 2^1, 0, 0, 2^2, 0, \ldots)$ gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} |q_k x_k^0| = \sum_{k=1}^{\infty} q_k x_k^0 = \sum_{r=0}^{\infty} x^0_{3r+2} 2^{-(3r+2)}$$
$$= \sum_{r=0}^{\infty} 2^{-(2r+2)} = 2/7 < \infty .$$

Hieraus folgt $x^0 \in |Q| \cap c_Q$ und

$$\lim_Q x^0 = \sum_{k=1}^{\infty} q_k x_k^0 + 1 = 9/7 \neq 2/7 = \sum_{k=1}^{\infty} q_k x_k^0 ,$$

was $Q \notin |0|$ nach Satz 5.7aii zur Folge hat.

b) Es ist noch $Q \in J_F$ zu zeigen.

Nach Satz 2.15 ist zu zeigen, daß für alle $f \in c_Q'$ mit $f(x) = 0$ auf c auch $f(x) = 0$ auf F_Q folgt. Sei also $f \in c_Q'$ mit $f(x) = 0$ auf c; da Q normal ist, gibt es nach dem Zusatz von Satz 2.14 ein $\alpha \in \mathbb{C}$ und ein $t \in l$ derart, daß

$$f(x) = \alpha \lim_Q x + \sum_{n=1}^{\infty} t_n \sum_{k=1}^{\infty} q_{nk} x_k$$

für alle $x \in c_Q$ gilt.

Insbesondere erhält man für $e^{3r} \in c$

$$0 = f(e^{3r}) = \alpha q_{3r} + \sum_{n=3r}^{\infty} t_n q_{n,3r}$$

$$= \alpha q_{3r} + q_{3r} \sum_{n=3r}^{\infty} t_n$$

für alle $r \in \mathbb{N}$. Aus $q_{3r} \neq 0$ für alle $r \in \mathbb{N}$ erhält man schließlich

$$\alpha = -\sum_{n=3r}^{\infty} t_n = -\sum_{n=3(r+1)}^{\infty} t_n \quad \text{und}$$

$$t_{3r} + t_{3r+1} + t_{3r+2} = 0 .$$

Daraus folgt z.B. für r = 1

$$\alpha = -\sum_{n=3r}^{\infty} t_n = -\sum_{v=1}^{\infty} (t_{3v} + t_{3v+1} + t_{3v+2}) = 0.$$

Da laut Voraussetzung $f(e^k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, folgt aus Satz 3.7 für alle $x \in F_Q$

$$f(x) = \alpha(\lim_Q x - \sum_{k=1}^{\infty}{}' q_k x_k) + \sum_{k=1}^{\infty} x_k f(e^k) = 0 ,$$

woraus $Q \in J_F$ und damit $Q \in |J|$ folgt.

c) Verwendet man Teil b) des Beweises und berechnet t_{3r}, t_{3r+1} und t_{3r+2} aus $0 = f(e^{3r})$, $0 = f(e^{3r+1})$ und $0 = f(e^{3r+2})$, so erhält man durch $\alpha = 0$ folgende Beziehungen für alle $r \in \mathbb{N}$:

$$t_{3r} = 0 , \; t_{3r+1} + t_{3r+2} = 0 \quad \text{und}$$

$$t_{3(r+1)+2} = 2^{2r+2}(2^{2r+2} - 1)^{-1} \, t_{3r+2} .$$

Aus Letzterem erhält man $\sum_{r=0}^{m} |t_{3r+1}| \longrightarrow \infty$ für $m \longrightarrow \infty$ und $t_2 = -t_1 \neq 0$; dies ist ein Widerspruch zu $t \in l$, d.h. es gilt $t_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit gilt aber

$$f(x) = \alpha \lim_Q x + \sum_{n=0}^{\infty} t_n \sum_{k=1}^{\infty} q_{nk} x_k = 0 \text{ für alle } x \in c_Q,$$

was die Perfektheit von Q, d.h. $\overline{c} = c_Q$ zur Folge hat.

8.6 Beispiel:

Sei $h_k := 2^{-k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und das Matrixverfahren $H = (h_{nk})_{n,k \in \mathbb{N}}$ definiert durch

$$H := \begin{bmatrix}
h_1 & & & & & & & & & \\
h_1 & 1\,h_2 & & & & & & & & \\
h_1 & 1\,h_2 & h_3 & & & & & & & \\
h_1 & 1\,h_2 & h_3 & h_4 & & & & & & \\
h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & -2h_5 & & & & & \\
h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & -2h_5 & h_6 & & & & \\
h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & -2h_5 & h_6 & h_7 & & & \\
h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & h_6 & h_7 & 3\cdot h_8 & & \\
h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & h_6 & h_7 & 3\cdot h_8 & h_9 & \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{bmatrix}$$

H besitzt folgende Eigenschaften:

i) H ist konullär;

ii) $H \in J_F \setminus 0_F$;

iii) $H \in |0| \subseteq 0$ und damit $H \in |J| \subseteq J$;

iv) H ist nicht ersetzbar(vgl. Folgerung 6.5).

Beweis:

i) folgt unmittelbar aus der Definition von H.

ii) a) Der Beweis von $H \in J_F$ verläuft analog zum Beweis von $Q \in J_F$ in 8.5.

b) Nach a) ist noch $H \notin 0_F$ zu zeigen.

Sei $x^0 = (x_k^0)_{k \in \mathbb{N}}$ definiert durch

$$x_k^0 := \begin{cases} (-1)^{r+1}(r\, h_{3r-1})^{-1} & \text{für } k = 3r-1 \text{ und } r \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} ;$$

damit folgt

$$\lim_H x^0 = \sum_{k=1}^{\infty} h_k x_k^0 + 1 \neq \sum_{k=1}^{\infty} h_k x_k^0 \text{ , da}$$

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} h_k x_k^0 = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r+1}\, r^{-1}$$

existiert. Aus (*) ist $x^0 \in I_H$ und aus der Konstruktion von H ist $x^0 \in B_H$ ersichtlich, woraus $x^0 \in F_H = I_H \cap B_H$ nach Lemma 3.3 und insgesamt $A \notin 0_F$ nach Satz 5.7bii folgt.

iii) Nach Satz 5.7aii gilt genau dann $H \in |0|$, wenn

$$\lim_H x = \sum_{k=1}^{\infty} h_k x_k$$

für alle $x \in |H| \cap c_H$ gilt. Ist $x \in |H| \cap c_H$, dann gilt nach Lemma 3.4b die Beziehung $\sum_{k=1}^{\infty} |h_k x_k| < \infty$.

Daraus folgt laut Konstruktion von H

$$\lim_H x = \sum_{k=1}^{\infty} h_k x_k + \lim_{r\to\infty} (-1)^{r+1}\, r\, h_{3r-1} x_{3r-1}$$

für alle $x \in |H| \wedge c_H$, wobei der Grenzwert im Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung existiert.

$\lim_H x = \sum_{k=1}^{\infty} h_k x_k$ ist also gezeigt, wenn

$\lim_{r\to\infty} (-1)^{r+1}\, r\, h_{3r-1} x_{3r-1} = a = 0$ bewiesen ist.

Angenommen es sei $a \neq 0$, dann gibt es ein $n_o \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $r \in \mathbb{N}$ mit $r \geq n_o$

$$|r\, h_{3r-1} x_{3r-1}| \geq 2^{-1}|a|$$

und damit $|h_{3r-1} x_{3r-1}| \geq (2r)^{-1}|a|$ gilt.

Daraus folgt wegen

$$\sum_{r=n_o}^{\infty} |h_{3r-1} x_{3r-1}| \geq 2^{-1}|a| \sum_{r=n_o}^{\infty} r^{-1}$$

ein Widerspruch zu $\sum_{k=1}^{\infty} |h_k x_k| < \infty$.

8.7 Beispiel:

Sei $q_k := 2^{-k}$ und die Matrix $D = (d_{nk})_{n,k\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$d_{nk} := \begin{cases} (-1)^{n+1}\, n q_n & \text{für } k = n \\ q_k & \text{für } k > n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

D hat folgende Eigenschaften:

i) D ist konullär

ii) $D \in |0|$ und damit $D \in |J|$;

iii) $D \notin J_P$ und damit $D \notin 0_P$.

Beweis:

i) D ist konull$\mathfrak{S}$r, da $d_k := \lim_{n\to\infty} d_{nk} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$

und $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} d_{nk} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} q_k + \lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1} n q_n = 0$

gilt.

ii) Für alle $x \in |D| \cap c_D$ gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} |d_{1k} x_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |q_k x_k| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} |d_{nk} x_k| < \infty .$$

was die Existenz von $\sum_{k=1}^{\infty} q_k x_k$ für alle $x \in |D| \cap c_D$

impliziert. Damit erhält man für alle $x \in |D| \cap c_D$

$$\lim_D x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} q_k x_k + \lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1} n q_n x_n$$

$$= \lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1} n q_n x_n = a = 0 = \sum_{k=1}^{\infty} d_k x_k ,$$

woraus $D \in |0|$ nach Satz 5.7aii) folgt; dabei zeigt man $a = 0$ wie im letzten Beweisteil von 8.6iii.

iii) Wegen $\lim_D \in c_D'$ und $\lim_D x = 0$ für alle $x \in c$ ist $D \notin J_P$ gezeigt, wenn man die Existenz eines $y \in F_D$ mit $\lim_D y \neq 0$ nachweist.

Definiert man $y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ durch $y_k := (-1)^{k+1} (k q_k)^{-1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, dann gilt $y \in F_D = B_D$ und $\lim_D y = 1$.

In 8.8 wird ein Beispiel eines konullären Verfahrens mit der Eigenschaft O_F und mit "maximal inset" gegeben; dieses Verfahren ist nach 6.9 ersetzbar. Als letztes Beispiel betrachten wir ein konulläres Verfahren, das die Eigenschaft O_F aber nicht "maximal inset" besitzt; hier kann gezeigt werden, daß dieses Verfahren nicht ersetzbar ist, d.h. es gibt nicht-ersetzbare konuläre Verfahren, die die Eigenschaft O_F aber nicht "maximal inset" besitzen.

8.8 Beispiel:

Sei $(g_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l$ und das Matrixverfahren $G = (g_{nk})_{n,k\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$g_{nk} := \begin{cases} g_k & \text{für } k \leq n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

G besitzt folgende Eigenschaften:

i) G ist konullär und besitzt "maximal inset";

ii) $G \in O_F$;

iii) G ist ersetzbar.

Beweis:

Für alle $x \in c_G$ gilt laut Konstruktion von G

$\lim_G x = \sum_{k=1}^{\infty} g_k x_k$; daraus folgt unmittelbar i)

und nach Satz 5.7bii die Aussage $G \in O_F$.

Da G "maximal inset" besitzt, ist G nach Folgerung 6.9 ersetzbar.

8.9 Beispiel:

Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l$ und $c_k > 0$ für alle $k\in\mathbb{N}$; definiert man das Matrixverfahren $C = (c_{nk})_{n,k\in\mathbb{N}}$ durch

$$c_{nk} := \begin{cases} c_k & \text{für } k < n \\ c_k & \text{für } k = n = 2r+1 \text{ und } r\in\mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

so hat C folgende Eigenschaften:

i) C ist konullär;

ii) $C \in 0_F$;

iii) C ist nicht ersetzbar;

iv) C besitzt nicht "maximal inset".

Beweis:

i) C ist konullär, da wegen der Existenz von $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ insbesondere $\lim_{k\to\infty} c_k = 0$ und damit

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k' - \lim_{k\to\infty} c_{2k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k$$

gilt.

ii) $C \in 0_F$ gilt nach Satz 5.7b genau dann, wenn $\lim_C x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$ für alle $x \in F_C$ gilt. Da für alle $x \in F_C \subseteq I_C$ die Existenz von $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$ gesichert ist und insbesondere $\lim_{k\to\infty} c_k x_k = 0$ gilt, erhält man für alle $x \in F_C$:

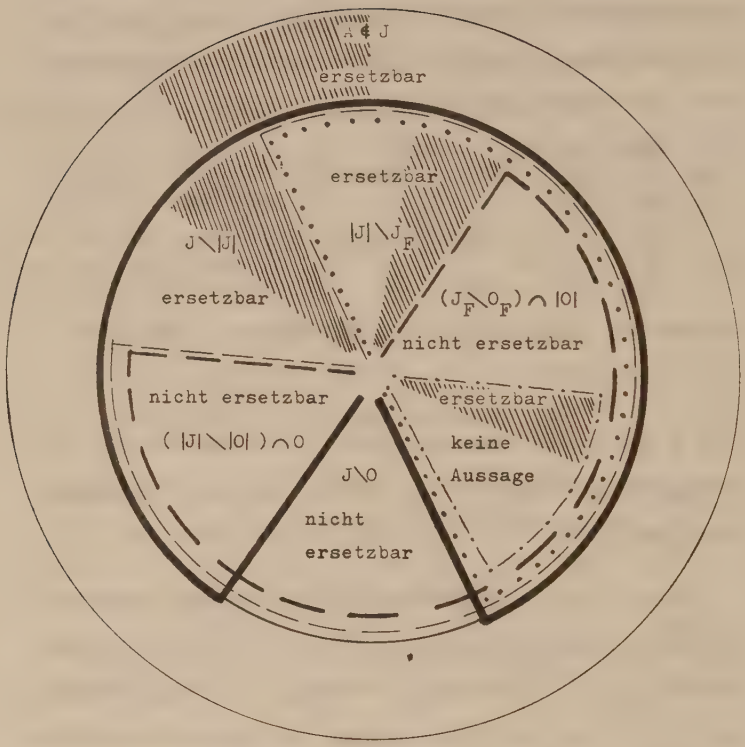
$$\lim_C x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k - \lim_{k\to\infty} c_{2k+1} x_{2k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k .$$

iii) Nach Satz 6.11 genügt es $F_C \neq L_C$ zu zeigen; nach Lemma 3.3 genügt es wegen $F_C = L_C \cap I_C$ die Existenz eines $x \in B_C = L_C$ mit $x \notin I_C$ nachzuweisen. Dazu betrachten wir die Folge $x^o = ((-1)^{k+1} c_k^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$: Aus $\sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} x_k^o = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $\sup_{m,n \in \mathbb{N}} |\sum_{k=1}^{m} c_{nk} x_k^o| \leq 1$ und $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k^o = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}$ sieht man, daß die geforderten Eigenschaften erfüllt sind; C ist also nicht ersetzbar.

iv) C hat nicht "maximal inset", da für die in iii) betrachtete Folge $x^o \notin I_C$ aber $x^o \in c_C$ gilt(iv)folgt auch aus 6.9).

Durch die Beispiele wurde also gezeigt, daß die Enthaltenseinsrelationen in Satz 8.1 echt sind und daß O_F(vgl.8.8 und 8.9), $J \setminus O$(vgl.8.4), $J \setminus |J|$(vgl.8.3) und $|J| \setminus J_F$(vgl.8.7) als Mengen von konullären Matrixverfahren aufgefaßt nicht-leere Mengen sind.

Eine Skizze, die Satz 8.1 veranschaulicht und einen Überblick über die Ersetzbarkeit von konullären Matrixverfahren gibt, schließt diese Arbeit ab.



Die innere Kreisfläche stellt die konullären Matrixverfahren mit der Eigenschaft J dar.

0; ····· |0|; —·—·— 0_F;
— — —|J|; ▬ ▬ J_F;

konulläre Verfahren mit "maximal inset".

Literaturverzeichnis:

[1] Agnew, R.P.: On ranges of inconsistency of regular transformations and allied topics. Ann. of Math., IIs32, S.715-722(1931).

[2] Boos, J.: Verträglichkeit und Ersetzbarkeit von konullären Matrixverfahren. Wissenschaftliche Arbeit zur Prüfung für das Lehramt an Gymnasien; Tübingen (1969).

[3] Brudno, A.L.: Summation of bounded sequences by matrices. Mat. Sbornik, n. Ser. 16(58), S.191 - 247(1945).

[4] Chang, S.C.: Summability: Projections, closure properties and consistency problems. Dissertation: Carleton University: Ottowa, Ontario (1968).

[5] Chang, S.C.: Conull FK-spaces belonging to the class O. MZ 113, S.249 - 254(1970).

[6] Chang, S.C.; M.S. Macphail, A.K. Snyder and A.Wilansky: Consistency and replaceability for conull matrices. MZ 105, S.208 - 212(1968).

[7] Floret, K. und J. Wloka: Einführung in die Theorie der lokalkonvexen Räume. Lecture Notes in Mathematics 56(1968)

[8] Hardy, G.H.: Divergent series.
Oxford: At the Clarendon Press (1949).

[9] Jurimäe, E.: Einige Fragen über verallgemeinerte Matrixverfahren; koreguläre und konulläre Verfahren.
Izvestija Akad. Nauk Estonsk SSR, Ser. techn. fiz.-mat. Nauk 8, S.115-121(1959).

[10] Jurimäe, E.: Remarks on conull summabilty methods.
Tartu gosudarst. Univ., učenye Zapiski 150, Trudy Mat. Meh. 4, S.144-152(1964).

[11] Jurimäe, E.: Topologische Eigenschaften von Co-Null-Methoden der Summation.
Tartu gosudarst. Univ., učenye Zapiski 177, Trudy Mat. Meh. 5, S.43-60(1965).

[12] Mazur, S. et W. Orlicz: Sur les méthodes linéaires de sommation.
C.R. Acad. Sci. Paris 196, S.32-34(1933).

[13] Mazur, S. and W. Orlicz: On linear methods of summability.
Studia math. 14, S. 129-160(1955).

[14] Parameswaran, M.R.: Some applications of functional analysis in summability.
Math. Student 26, S.93-104(1959).

[15] Petersen, G.M.: Summability methods and bounded sequences.
J. London math. Soc. 31, S.324-326(1956).

[16] Petersen, G.M.: Regular matrix transformations.
New York - Toronto - Sydney: Mac Graw-Hill Publishing Company Ltd. 1966, VIII, 142 S.

[17] Sember, J.J.: The associative part of a convergence domain is invariant.
Canadian Math. Bulletin 13(1), S.147-148(1970).

[18] Snyder, A.K.: Conull and coregulär FK-spaces.
MZ 90, S.376-381(1965).

[19] Volkov, I.I.: Über die Verträglichkeit zweier Summationsmethoden.
Mat. Zametki 1, 283-290(1967).

[20] Wilansky, A.: Functional analysis.
New York: Blaisdell 1964.

[21] Wilansky, A.: Topics in functional analysis.
Lecture Notes in Mathematics 45(1967).

[22] Wilansky, A.: An application of Banach linear functionals to summability.
Trans. Amer. Math. Soc. 67, S.59-68(1949).

[23] Wilansky, A.: The inset, replaceable matrices, the basis in summability space.
Duke Math. J. 19, S.647-660(1952).

[24] Wilansky, A.: Distinguished subsets and summability invariants.
J. d'Analyse math. 12, S.327-350(1964).

[25] Wilansky, A. and K. Zeller: FH-spaces and intersections of FK-spaces.
Michigan Math. J. 6, S.349-357(1959).

[26] Zeller, K.: Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren.
MZ 53, S.463-487(1951).

[27] Zeller, K.: Faktorfolgen bei Limitierungsverfahren.
MZ 56, S.134-151(1952).

[28] Zeller, K.: Abschnittskonvergenz in FK-Räumen.
MZ 55, S.55-70(1951).

[29] Zeller, K.: Theorie der Limitierungsverfahren.
Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, Heft 15,
Berlin - Göttingen - Heidelberg 1958.

L e b e n s l a u f

Am 20. Juni 1944 wurde ich, Johann Boos, als Sohn des Paul Boos und seiner Ehefrau Berta, geb. Löffler, in Aitrach, Krs. Wangen, geboren; mein Vater starb im Dezember 1944 im Gefangenenlager in Nowosibirsk.
Im Herbst 1950 trat ich in die Volksschule Treherz in der Gemeinde Aitrach ein, von wo ich im Frühjahr 1958 an das staatliche Aufbaugymnasium in Saulgau überwechselte; dort legte ich im Februar 1964 die Reifeprüfung ab.
Nach zweijähriger Dienstzeit bei der Bundeswehr begann ich im Sommersemester 1966 mein Studium an der Universität Tübingen in den Fächern Mathematik und Physik. Im Juli 1970 legte ich in Mathematik als erstem und im Januar 1971 in Physik als zweitem Hauptfach die wissenschaftliche Prüfung für das Lehramt an Gymnasien ab. Anschließend war ich als geprüfte wissenschaftliche Hilfskraft im Fachbereich Mathematik der Universität Tübingen angestellt.
Seit Juli 1970 entstand unter Anleitung von Herrn Dr.W. Beekmann und Herrn Prof.Dr.K. Zeller die vorliegende Arbeit "Verträglichkeit und Ersetzbarkeit von konvergenztreuen Matrixverfahren".
Meine akademische Ausbildung verdanke ich den Herren Professoren W.Braunbek, H.Heyer, H.Krüger, F.Lenz, G.Möllenstedt, R.Mühleisen, H.Salzmann, H.H.Schaefer, O.Tamaschke, H.Wielandt und K.Zeller.

Druck: Polyfoto Dr. Vogt KG
Stuttgart 1, Königstraße 51
Telefon 295681

Druck: Polyfoto Dr. Vogt KG
Stuttgart 1, Königstraße 51
Telefon 295681